

2. Vorlesung

21.10.21

Form von Rep. $\mathcal{B}$.

$$A = \mathbb{R}^{(0)} \quad , \quad U = \mathbb{R}^{(2)} \text{ Col.}$$

Skalarraum :

$$\mathbb{F} = \mathcal{C}(U, \mathbb{R}^n)$$

($\cdot$) Skalarraum.

} Skalarraum.

Verfälscht

$$X = \left\{ u \in \mathbb{F} : \begin{array}{l} u(0) = 0, \\ [u]_U \leq \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

Übung :

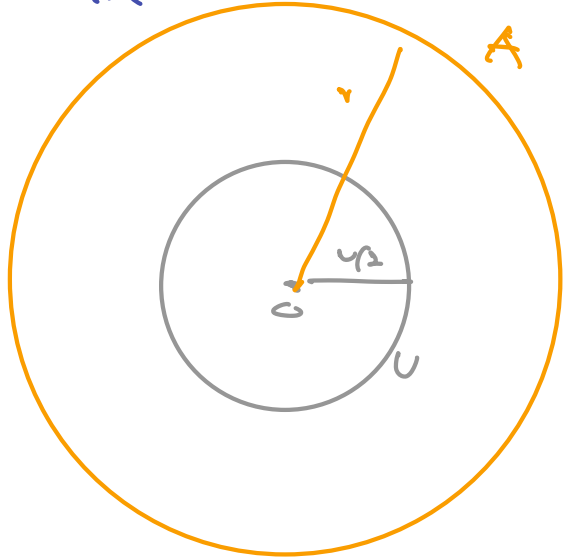
$$Tu := -\hat{p} \circ (\text{ist } u)$$

X abgeschlossen in $\mathbb{F}$. ✓

Das ist absurd!

Für $x \in X$ und $x \in U$

$$\begin{aligned} |u(x)| &= |u(x) - u(0)| \\ &\leq [u]_0 |x - 0| \\ &\leq [u]_0 |x| \end{aligned}$$



అంబ :

$$\begin{aligned} |x + c(x)| &\leq (1 + \underbrace{C_0}_{= \frac{1}{2}}) |x| \\ &< 2|x| < r \end{aligned}$$

 $\leftarrow$

☞ Extra Credit

$\ell_i \times \ell \times \ell$

Def'n.

• T ist ein X in X :

- T_u ist stetig

$$- (T_u)(0) = -\hat{\varphi}(0 + u(0))$$

$$= -\hat{\varphi}(u(0))$$

$$= -\hat{\varphi}(0) = 0 \quad \checkmark$$

- T_u ist eine Lipschitz : $x, y \in U$:

$$|T_u(x) - T_u(y)|$$

$$= | \hat{\varphi}(x + u(x)) - \hat{\varphi}(y + u(y)) |$$

$$\leq [\hat{\varphi}]_A \cdot |x + u(x) - (y + u(y))|$$

$$\leq [\hat{\varphi}]_A \cdot [1 + u]_U |x - y|$$

$$\leq [\hat{\varphi}]_A (1 + [u]_U) |x - y|$$

Also:

$$[T_u]_U \leq \underbrace{[\hat{\varphi}]_A}_{= \frac{1}{4}} (1 + \underbrace{[u]_U}_{= \frac{1}{2}}) \quad u \in X$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{circled}} \cdot (1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{underlined}}) \leq \underbrace{\frac{3}{4}}_{\text{underlined}} \quad \checkmark$$

Also:

$$T_u \in X.$$

$\mathbb{R}$ T mit Kantenkosten ≥ 0 , n.n., $\| \cdot \|$, $x \in V$:
 $u, v \in X$:

$$\begin{aligned}
 & |T_u(x) - T_v(x)| \\
 &= | \hat{c}(x+u(x)) - \hat{c}(x+v(x)) | \\
 &\leq [\hat{c}]_A (x+u(x) - (x+v(x))) \\
 &\leq [\hat{c}]_A (u(x) - v(x)) \\
 &\leq [\hat{c}]_A \cdot \|u - v\|_V
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|T_u - T_v\|_V \leq [\hat{c}]_A \|u - v\|_V,$$

$\leq \frac{1}{f}$

~~also~~ BFS ~~available~~:

T und ~~single~~ ~~fixpunkt~~ $u \in X$.
 $\square$

Beweis Prop C:

Prop A: f ist surjektiv.

Prop B: $\Rightarrow$ gilt
 $f: U \rightarrow A$
 exist
 $f \circ f = \text{id}_U$.

Wobei: $U = f(U) \subset A$.

Dann:
 $f: U \rightarrow U$ surjektiv &
injektiv,
 also bijectiv

$f^{-1} = f$ Lipschitz. —

U ist offen: denn

$$U = f^{-1}(U) \quad \text{also} \quad f^{-1}(U) \subset U \quad \text{also} \quad U \text{ ist offen}$$

Beweis D:

$$\|D\hat{\varphi}\|_A = \|\hat{\varphi}\|_A \leq \frac{1}{\epsilon}$$

Damit

$$D\varphi = \text{id} + D\hat{\varphi} \quad \text{wegen}$$

"Sannensatz".

Korollar: $x_0 \in U$

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \lambda(x)(x - x_0)$$

mit

$$\lambda(x) = \int_0^1 D\varphi((1-t)x_0 + tx) dt$$

$$\lambda(x_0) = D\varphi(x_0).$$

uniform

Also sind $\lambda(x)$ uniform für x nahe x_0 .

$$x = x_0 + \lambda'(x) (\varphi(x) - \varphi(x_0))$$

Wim: φ ist invertierbar, $\varphi' = f$

$$\begin{aligned}
 f(u) &= f(u_0) + \underbrace{f'(u_0)}_{\text{stetig}} (u - u_0) \\
 &= f(u_0) + \underbrace{f'(u_0)}_{\text{stetig}} (u - u_0) \\
 &\quad + \underbrace{\left\{ \underbrace{f'(u) - f'(u_0)}_{\substack{\xrightarrow{u \rightarrow u_0} 0}} \right\}}_{\text{stetig}} (u - u_0) \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{o(u - u_0)}
 \end{aligned}$$

$$= f(u_0) + \underbrace{f'(u_0)}_{\text{stetig}} (u - u_0) + o(u - u_0) .$$

Ans: f ist in u_0 diffbar:

$$Df(u_0) = \underbrace{(Df)'(u_0)}_{\text{stetig}} .$$

und Df ist stetig. ~~D~~

Def: $r \geq 1$ ist die Anzahl, $f \in \mathcal{P}_r$:

$$D_f = (D_{\mathcal{P}})^{-1} \circ f.$$

Gilt auch die für r $r \geq 1$,
und ist $f \in \mathcal{C}^r$: Def:

$$D_{\mathcal{P}} \in \mathcal{C}^r, \quad f \in \mathcal{C}^r$$

$$D_{\mathcal{P}_1} \in \mathcal{C}^r$$

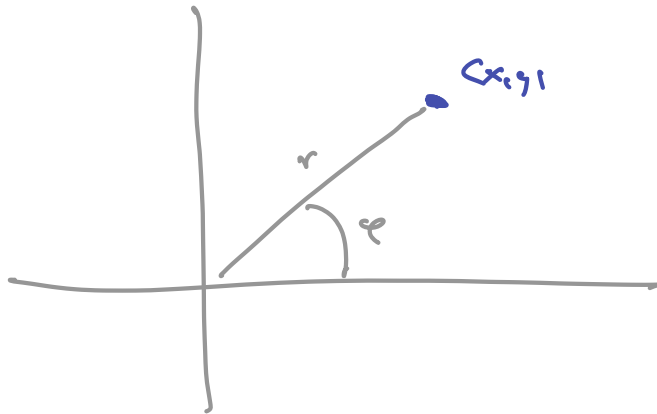
$$D_{\mathcal{P}_1} \circ f \in \mathcal{C}^r$$

Def:

$$D_f \in \mathcal{C}^r$$

$$f \in \mathcal{C}^r.$$

Q.E.D.



$$D\chi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\det D\chi = r \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} r \neq 0 \\ \text{vp. } r > 0. \end{matrix}$$

Also: χ regular in all Punkte
 (r, φ) mit $r > 0$.

Fr: $r=0$:

$$\chi(0, \varphi) = (2, 0)$$

nicht möglich

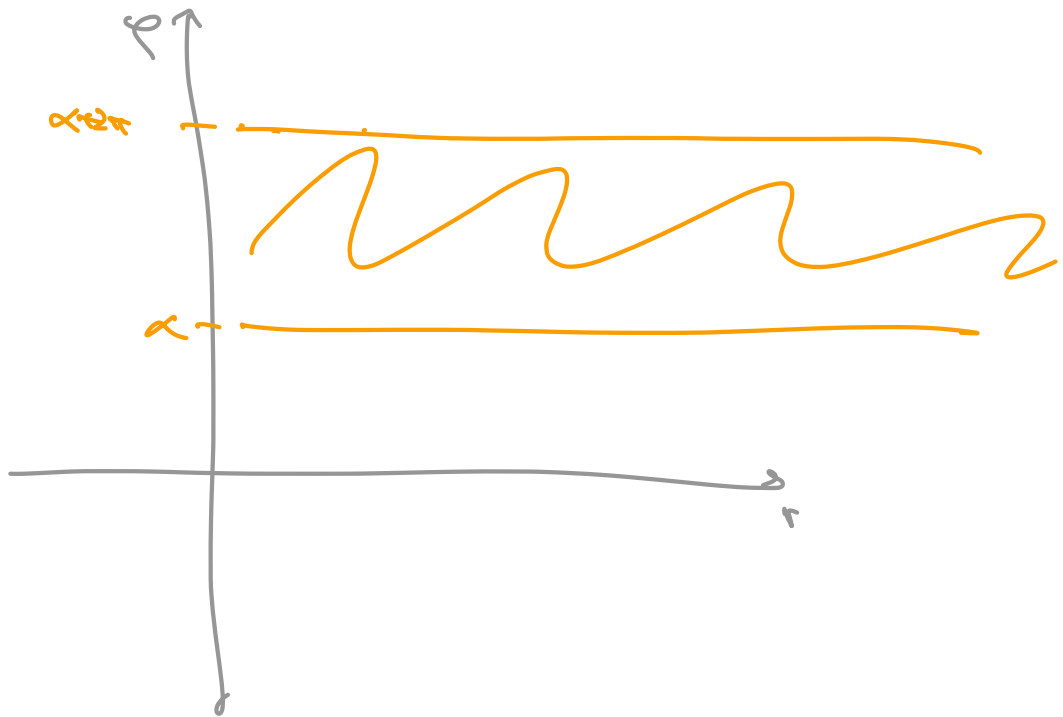
Folgerung:

$$\chi(r, \varphi + 2\pi n) = \chi(r, \varphi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Fr: χ Differenz von zwei Einheitskreisen:

z.B.

$$(0, \alpha) \times (\alpha, \alpha + 2\pi) :$$



Beispiel: Constant rotation sym. Harmonisch

Funktion auf $\mathbb{R}^2$:

$$u = u(x, y)$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

$\times$ rotationssym.:

$$u_\varphi = 0.$$

Dann u in Polarkoordinaten:

$$u(r, \varphi) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

$$u_\varphi = 0$$

und:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0$$

$\Rightarrow$:

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = 0.$$

.....
Angenommen u ist: $u = u(r) = \frac{1}{r} + \text{const.}$

Erste ∇^2 ist u auf $\mathbb{R}^2$ genau $\Delta u = 0$.

Es
wird

$$u = \frac{1}{r}.$$

$$\det D_f = r^2 R(\vartheta)$$

$$\neq 0 \quad \text{für } r > 0,$$

$$R(\vartheta) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \vartheta \neq 2\pi u, \quad u \in \mathbb{Z}.$$

$$\underline{\text{Fehler:}} \quad \neq \pi u, \quad u \in \mathbb{Z}!$$

Beispiel: Karam'sche rekursive Sym. Fkt.:

$$u(x, y, t) = v(r) \quad :$$

$$\leadsto \quad u_{rr} + \frac{2}{r} u_r = 0,$$

Ausgangspunkt:

$$u_r = - \frac{Q}{r^2}$$

$$u = A + \frac{Q}{r},$$