6 **Banachscher Fixpunktsatz** *Sei E ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|$, sei X eine abgeschlossene Teilmenge von E, und $T\colon X \to X$ eine Kontraktion. Das heißt, es existiert eine Konstante $\theta \in (0,1)$, so dass*

$$\|Tu - Tv\| \leqslant \theta\,\|u - v\|\,, \qquad u, v \in X.$$

Dann besitzt T in X genau einen Fixpunkt ξ. Außerdem konverigert für jedes $x_0 \in X$ die Folge $x_n = T^n x_0$ gegen diesen Fixpunkt ξ mit

$$\|x_n - \xi\| \leqslant \frac{\theta^n}{1-\theta}\,\|x_1 - x_0\|\,, \qquad n \geqslant 1. \quad \rtimes$$

Die Herausforderung bei der Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes besteht natürlich darin, im jeweiligen Fall einen geeigneten Banachraum E und eine geeignete Teilmenge X zu finden. Der folgende Beweis gibt dafür ein Beispiel.

⟪⟪⟪ *Beweis von Proposition B* Schreibe also $\varphi = id + \hat\varphi$ und $\psi = id + \hat\psi$. Die Gleichung $\varphi \circ \psi = id$ ist dann äquivalent zu

$$\hat\psi = -\hat\varphi \circ (id + \hat\psi).$$

Diese Gleichung lösen wir mithilfe des Banachschen Fixpunktsatzes im Banachraum $E = C(V, \mathbb{R}^n)$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|$. Als Teilmenge betrachten wir

$$X = \{u \in E : u(0) = 0,\ [u]_V \leqslant 1/2\}\,.$$

Es ist leicht zu sehen, dass X in E abgeschlossen ist. Auf X definieren wir

$$Tu = -\hat\varphi \circ (id + u).$$

Nun sind eine Reihe von Aussagen zu verifizieren.

T ist wohldefiniert, also Tu auf V definiert: Für $u \in X$ und $x \in V$ ist

$$|u(x)| = |u(x) - u(0)| \leqslant [u]_V\,|x|\,,$$

also

$$|x + u(x)| \leqslant (1 + [u]_V)\,|x| < 2\,|x| < r.$$

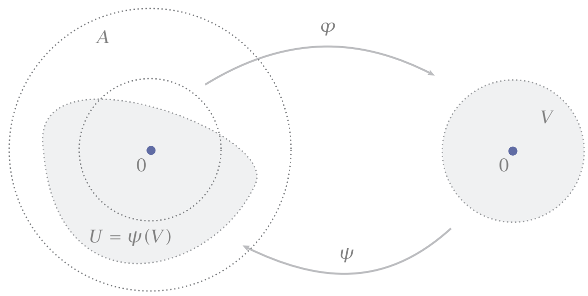
Also gilt $id + u\colon V \to A$, und $\hat\varphi \circ (id + u)$ ist auf V definiert.

T bildet X in X ab, mit $u \in X$ ist also auch $Tu \in X$: Tu ist sicher wieder stetig und

$$Tu(0) = -\hat\varphi(u(0)) = -\hat\varphi(0) = 0.$$

Abb 3

Zum Beweis von Proposition C



Außerdem haben wir für beliebige $x, y \in V$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |Tu(x) - Tu(y)| &= |\hat{\varphi}(x + u(x)) - \hat{\varphi}(y + u(y))| \\ &\leqslant [\hat{\varphi}]_A \, |(x + u(x)) - (y + u(y))| \\ &\leqslant [\hat{\varphi}]_A \, [id + u]_V \, |x - y| \\ &\leqslant [\hat{\varphi}]_A \, (1 + [u]_V) \, |x - y| \, . \end{aligned}$$

Also gilt

$$[Tu]_V \leqslant [\hat{\varphi}]_A \, (1 + [u]_V) \leqslant \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Somit ist $Tu \in X$.

T ist eine Kontraktion auf X bezüglich der Supremumsnorm: Es ist

$$\begin{aligned} |Tu(x) - Tv(x)| &= |\hat{\varphi}(x + u(x)) - \hat{\varphi}(x + v(x))| \\ &\leqslant [\hat{\varphi}]_A \, |(x + u(x)) - (x + v(x))| \\ &= [\hat{\varphi}]_A \, |u(x) - v(x)| \\ &\leqslant [\hat{\varphi}]_A \, \|u - v\|_V \, . \end{aligned}$$

Da dies für alle $x \in V$ gilt, folgt

$$\|Tu - Tv\|_V \leqslant [\hat{\varphi}]_A \, \|u - v\|_V \, .$$

Wegen $[\hat{\varphi}]_A \leqslant 1/4$ ist also T eine Kontraktion auf X.

Abschluss des Beweises: Der Banachsche Fixpunktsatz ist somit anwendbar, und T besitzt einen eindeutigen Fixpunkt $\hat{\psi} \in X$. Die Fixpunktgleichung ist aber äquivalent mit $\varphi \circ \psi = id$. Damit ist Proposition B gezeigt. ⟫⟫

7 **Proposition C** *Sei $\varphi\colon A \to \mathbb{R}^n$ lipschitzstetig wie in Proposition B. Dann ist φ ein Lipeomorphismus der Nullpunktsumgebung $U = \psi(V)$ auf V mit Umkehrabbildung $\varphi^{-1} = \psi$.* ⋊

⟪⟪⟪ Nach Proposition A ist φ injektiv, und nach Proposition B gibt es eine lipschitzstetige Abbildung $\psi\colon V \to A$ mit $\varphi \circ \psi = id_V$. Setzen wir also

$$U \coloneqq \psi(V) \subset B,$$

so ist $\varphi\colon U \to V$ injektiv und surjektiv, also bijektiv, mit lipschitzstetiger Umkehrabbildung $\psi = \varphi^{-1}\colon V \to U$. Außerdem ist U *offen*, denn $U = \varphi^{-1}(V)$ ist das Urbild einer offenen Menge unter der stetigen Abbildung φ. ⟫⟫⟫

▪ Regularität

Nun zeigen wir, dass ψ auch differenzierbar ist, wenn φ es ist. Dies geschieht wie im Beweis der Umkehrregel in einer Dimension $_{8.15}$, nur tritt an die Stelle der Ableitung φ' die totale Ableitung $D\varphi$.

Proposition D *Ist die Abbildung φ in Proposition C stetig differenzierbar, so ist φ ein Diffeomorphismus von U auf V.* ⋊

⟪⟪⟪ Wir hatten gezeigt $_5$, dass

$$\|D\hat{\varphi}\|_B = [\hat{\varphi}]_B \leqslant 1/4.$$

Somit ist $D\varphi = \mathrm{Id} + D\hat{\varphi}$ in jedem Punkt von B invertierbar $_{6.19}$. Aufgrund des Lemmas von Hadamard $_{14.15}$ gilt nun lokal um jeden Punkt $x_0 \in U$

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \Lambda(x)(x - x_0)$$

mit

$$\Lambda(x) = \int_0^1 D\varphi((1-t)x_0 + tx)\,\mathrm{d}t, \qquad \Lambda(x_0) = D\varphi(x_0).$$

Da $\Lambda(x_0)$ invertierbar ist, ist es aus Stetigkeitsgründen auch $\Lambda(x)$ für alle x in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0. Dort gilt dann auch

$$x = x_0 + \Lambda^{-1}(x)(\varphi(x) - \varphi(x_0)).$$

Mit $x = \psi(u)$ und $x_0 = \psi(u_0)$ ist dies gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \psi(u_0) + \Lambda^{-1}(\psi(u))(u - u_0)\\ &= \psi(u_0) + \Lambda^{-1}(\psi(u_0))(u - u_0)\\ &\qquad + \left[\Lambda^{-1}(\psi(u)) - \Lambda^{-1}(\psi(u_0))\right](u - u_0).\end{aligned}$$

Aufgrund der Stetigkeit von ψ und Λ verschwindet der Ausdruck in eckigen Klammern für $u \to u_0$. Wir erhalten somit

$$\psi(u) = \psi(u_0) + \Lambda^{-1}(\psi(u_0))(u - u_0) + o(u - u_0).$$

Also 14.5 ist ψ in u_0 differenzierbar mit Ableitung

$$D\psi(u_0) = (D\varphi)^{-1}(\psi(u_0)).$$

Dies zeigt auch, dass $D\psi$ ebenfalls stetig ist. Damit ist alles gezeigt. ⟫⟫

Der Kern des Beweises des Umkehrsatzes betraf lipschitzstetige Abbildungen. Die stetige Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung war dann wesentlich einfacher zu zeigen. Höhere Ableitungen bereiten dann keine weiteren Mühen mehr:

8 **Zusatz zum Umkehrsatz** *Gelten die Voraussetzungen des Umkehrsatzes* 1 *und ist φ von der Klasse C^r mit $1 \leqslant r \leqslant \infty$, so ist auch die lokale Umkehrabbildung ψ von der Klasse C^r.* ⋊

⟪⟪ Die Behauptung gilt für $r = 1$ aufgrund des Umkehrsatzes, und es ist

$$D\psi = (D\varphi)^{-1} \circ \psi.$$

Gilt nun die Behauptung für ein $r \geqslant 1$ und ist φ von der Klasse C^{r+1}, so sind auf der rechten Seite dieser Formel $(D\varphi)^{-1}$ und ψ von der Klasse C^r. Also gilt dasselbe auch für $D\psi$, und damit ist ψ selbst von der Klasse C^{r+1}. ⟫⟫

Wir merken noch an, dass die Lipschitzstetigkeit für die Existenz einer stetigen Umkehrabbildung tatsächlich nicht notwendig ist. Wissen wir bereits, dass die Abbildung injektiv ist, so ist sie auch offen. Der folgende Satz ist auch als Satz von der Invarianz der Dimension bekannt [1].

Brouwerscher Umkehrsatz *Ist $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine stetige und injektive Abbildung einer offenen Menge Ω im $\mathbb{R}^n$, so ist $\Omega' = \varphi(\Omega)$ offen und die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : \Omega' \to \Omega$ ebenfalls stetig.* ⋊

Ein relativ einfacher Beweis basiert auf der Theorie des Abbildungsgrads, doch geht dies über den Rahmen dieser Vorlesung hinaus.

▪ Koordinatentransformationen

Einen Diffeomorphismus

$$\varphi : \ \Omega \to \Omega', \quad x \mapsto u = \varphi(x),$$

kann man auffassen als eine *Koordinatentransformation*, die auf der Zielmenge Ω' mit Koordinaten u neue Koordinaten x aus der Menge Ω einführt. Koordinatentransformationen sind ein wichtiges Hilfsmittel, um mathematische Probleme zu

[1] Siehe auch: M. Müger, A remark on the invariance of dimension. arXiv:1310.8090v1 (2013).

lösen, und viele mathematische und physikalische Probleme haben ihre eigenen speziellen Koordinatensysteme. Die wichtigsten sind sicherlich die *Polar-* und *Kugelkoordinaten*.

Polarkoordinaten In der euklidischen Ebene lässt sich jeder Punkt durch seinen Abstand r zum Nullpunkt und den Winkel φ seines Ortsvektors mit der positiven x-Achse beschreiben. Umgekehrt wird durch

$$\chi : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

jedem Koordinatenpaar (r, φ) der entsprechende Punkt (x, y) in der Ebene zugeordnet. Für die so definierte Abbildung

$$\chi : \ [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad (r, \varphi) \mapsto (x, y)$$

ist

$$D\chi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \det D\chi = r.$$

Somit ist χ regulär in allen Punkten mit $r > 0$ und definiert dort einen lokalen Diffeomorphismus.

Für $r = 0$ dagegen ist χ nicht einmal injektiv, denn

$$\chi(0, \varphi) = (0, 0), \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Aber auch für $r > 0$ ist χ nicht injektiv, denn aufgrund der Periodizität der Kreisfunktionen gilt ja

$$\chi(r, \varphi + 2\pi n) = \chi(r, \varphi), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Daher ist χ ein Koordinatensystem nur nach Einschränkung auf geeignete Teilgebiete, wie zum Beispiel $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$ oder allgemeiner

$$(0, \infty) \times (\alpha, \alpha + 2\pi), \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Für die Umkehrabbildung ist dann jeweils der geeignete Zweig der Arcusfunktionen zu wählen. In vielen Fällen ist eine Rücktransformation jedoch nicht erforderlich, und die Mehrdeutigkeit der Polarkoordinaten kein Problem.

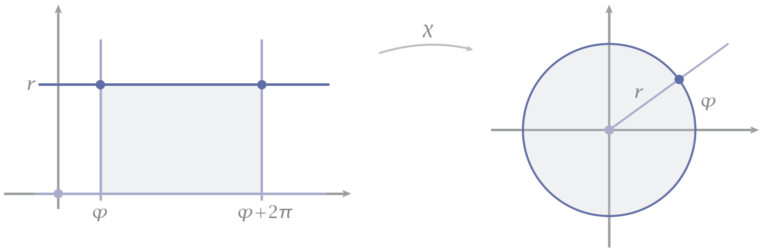
▹ *Beispiel* Gesucht sind *rotationssymmetrische* harmonische Funktionen u in der Ebene. Es soll also

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

gelten, und in Polarkoordinaten soll

$$v(r, \varphi) := u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

Abb 4 Polarkoordinaten



nicht von φ abhängen, also $v_\varphi = 0$ gelten. — Eine kleine Rechnung ergibt A-15.4

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi}.$$

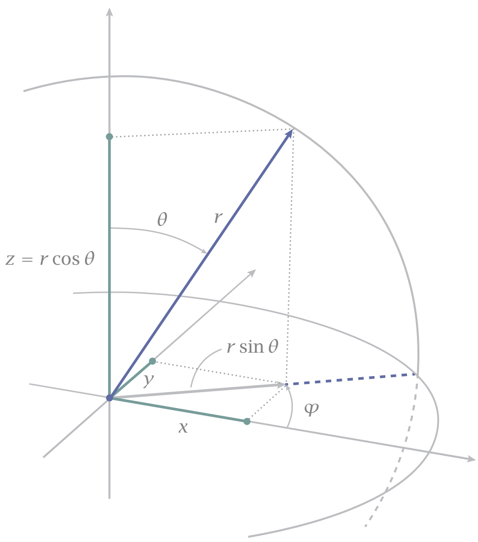
Somit suchen wir eine Lösung der Gleichung

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r = 0.$$

Deren allgemeine Lösung ist $v = a + b \log r$. Diese Funktion ist allerdings im Nullpunkt stetig und differenzierbar dann und nur dann, wenn $b = 0$. Somit sind die einzigen rotationssymmetrischen und auf ganz $\mathbb{R}^2$ harmonischen Funktionen die konstanten Funktionen. ◅

Abb 5

Kugelkoordinaten



Kugelkoordinaten Im euklidischen Raum lässt sich jeder Punkt durch seinen Abstand r zum Nullpunkt und zwei Winkel θ und φ beschreiben, dem *Azimutwinkel* θ seines Ortsvektors zur z-Achse und dem *Polarwinkel* φ seiner Projektion auf die xy-Ebene. Umgekehrt wird durch

$$\chi: \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

jedem Koordinatentripel (r,θ,φ) der entsprechende Punkt (x,y,z) im Raum zugeordnet. Für die so definierte Abbildung

$$\chi: \ [0,\infty)\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (r,\theta,\varphi) \mapsto (x,y,z)$$

ist

$$D\chi = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\det D\chi = r^2\sin\theta.$$

Diese Jacobideterminante verschwindet somit genau auf der z-Achse.

▷ Suchen wir im $\mathbb{R}^3$ nach rotationssymmetrischen harmonischen Funktionen, so führt der Ansatz $u(x,y,z) = v(r)$ zu der Differenzialgleichung

$$v_{rr} + \frac{2}{r}v_r = 0.$$

Die allgemeine Lösung ist in diesem Fall $v_r = -b/r^2$ und damit $v = a + b/r$. Auch in diesem Fall sind die einzigen rotationssymmetrischen und auf ganz $\mathbb{R}^3$ harmonischen Funktionen die konstanten Funktionen. ◁