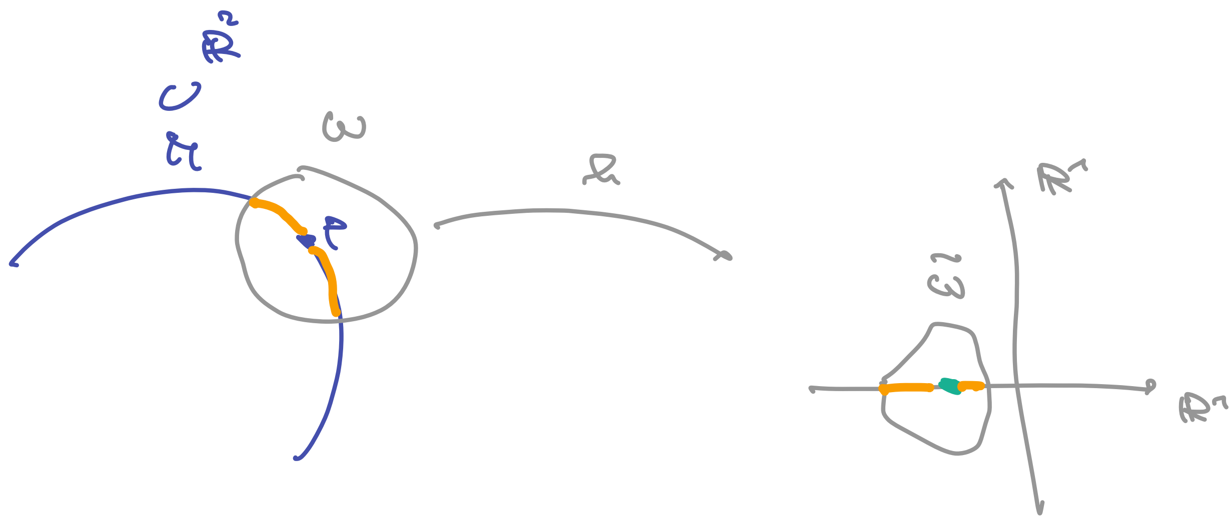
20. Vorlesung 12.1.2022

Niveauflächensatz: Lokal um jeden Punkt von M ex. eine diffbare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, so dass

$$M \cap W = \underbrace{\Gamma(\varphi)}_{\text{Graph von } \varphi}$$



Beweis: "$\Longrightarrow$" Wähle Umgebung um x_0:

$$M \cap W = \Gamma(\phi),$$

wobei

$$W = U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

$$\phi : U \longrightarrow V$$
$$u \longmapsto v = \phi(u).$$

Punkt

$$p = (u_0, v_0), \quad v_0 = \phi(u_0).$$

Definiere

$$h : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

$$(u,v) \longmapsto (x,y) = (u, v - \phi(u)).$$

Damit h injektiv,

Dh in jedem Punkt regulär.

Also: h ist ein Diffeomorphismus von W auf eine offene Teilmenge $\tilde{W}$ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

und

$$h(M \cap W) = \{ h(u,v),\ (u,v) \in \Gamma(\phi) \}$$
$$= \{ (x,y) \in \tilde{W} : x \in U,\ y = 0 \}$$
$$\subset \mathbb{R}^n \times 0^m$$

"$\Leftarrow$" Sei W eine Umgebung von p

und $\Phi : W \to \tilde{W}$ ein

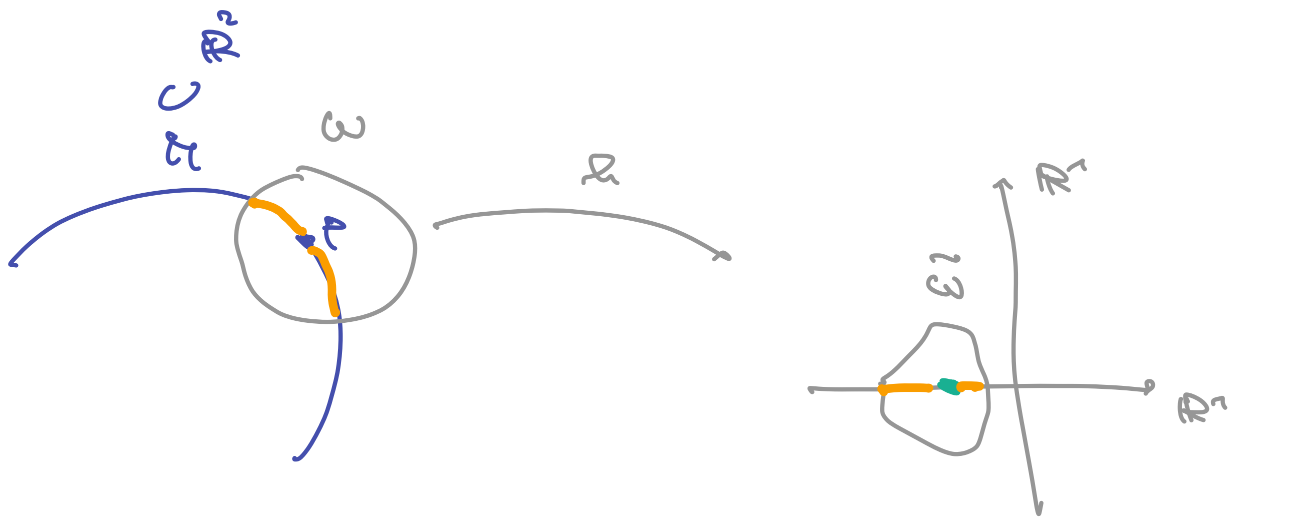
Diffeo wie in (s.o.).

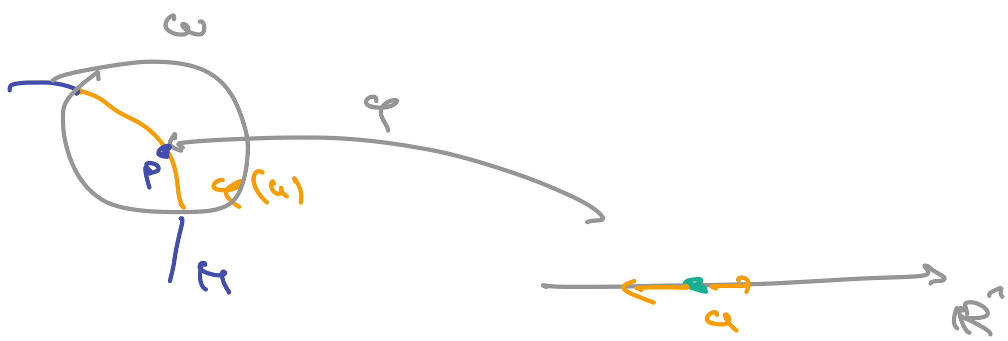
Setze

$$f = (\Phi_{n+1}, \ldots, \Phi_{n+m}) : W \to \mathbb{R}^m$$

Dann $f(M \cap W) = 0^m$,

und 0^m ist regulärer Wert. $\square$





Beweis: "$\Rightarrow$"

Sei M eine Mf, $p \in M$.

Dann ex. W um p:

$M \cap W = \Gamma(\Phi)$,

wobei $\Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Dann $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$,

$\varphi(x) = (x, \Phi(x))$

„$\Leftarrow$" Sei W Umgebung von p

und $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n+k}$ bzgl. Koo-system (siehe (K1)–(K3))

$U \subset \mathbb{R}^n$

Koord. in $\mathbb{R}^{n+k}$ umordnen:

$$\chi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \text{ ist Karte}$$

$x = \varphi^{-1}(p)$ regulär.

Nach ev. Verkleinerung von U:

$$\chi : U \longrightarrow \tilde{U} \text{ Diffeomorph.}$$

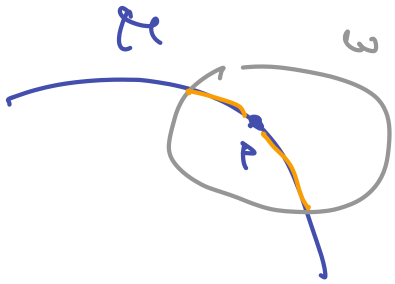
Dann ist

$$\tilde{\varphi} = \varphi \circ \chi^{-1} : \tilde{U} \longrightarrow W$$

(identisch in den ersten n Koordinaten),

Dafür gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \varphi(\chi^{-1}(\tilde{u})) \\ &= \varphi \circ \chi^{-1}(\tilde{u}) \\ &= \tilde{\varphi}(\tilde{u}) \\ &= \Gamma(\phi), \quad \phi = (\tilde{\varphi}_{n+1}, \dots, \tilde{\varphi}_{n+k}) \end{aligned}$$



Zz: es ex. ein Gebiet ω :

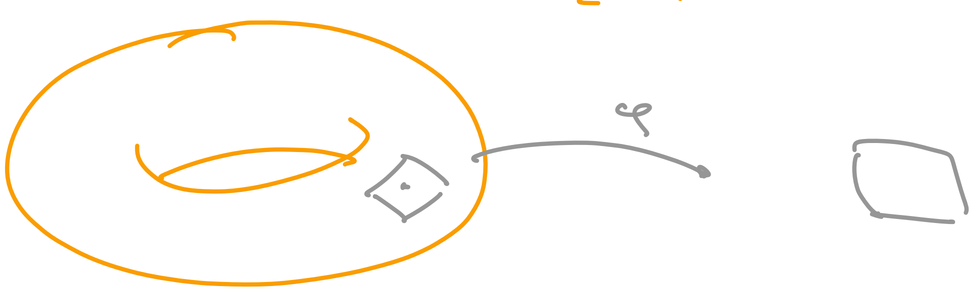
$$M \cap \omega = T(\mathcal{U}).$$

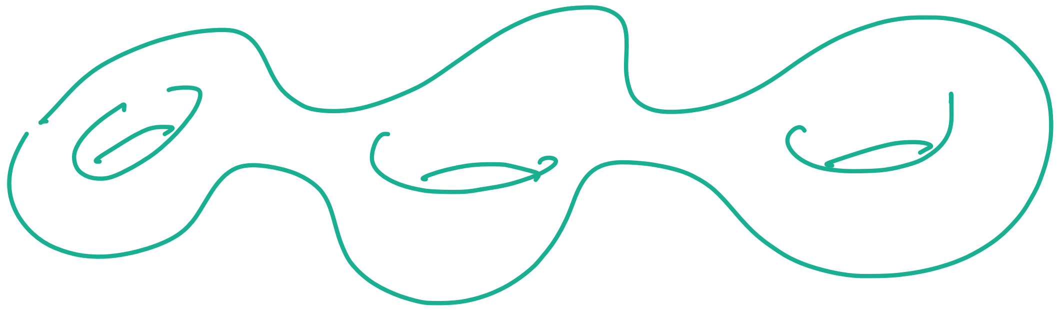
Beweis: Angenommen, dies falsch :

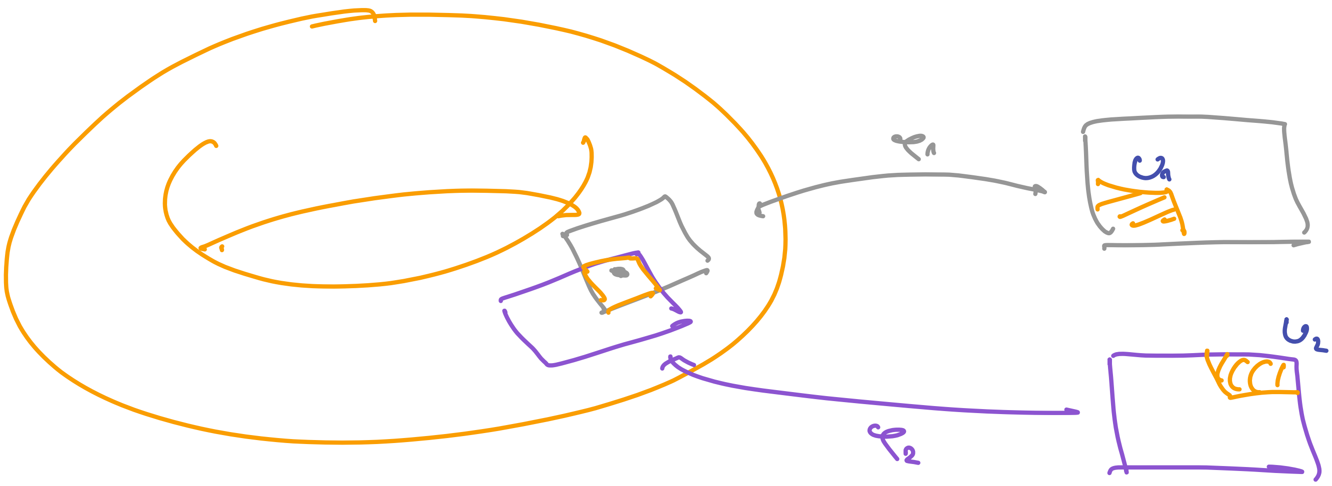
Dann ex. Folge (p_n) von Punkten auf M mit $p_n \to p$ und $\varphi^{-1}(p_n) \notin U$.

Dann aber ist φ^{-1} im Punkt p nicht stetig. Widerspruch zu (K-3).

2-Torus







$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \quad U_1 \longrightarrow U_2$$

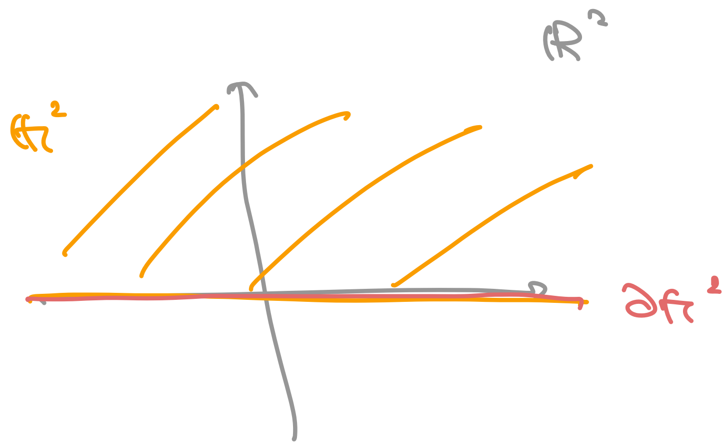
Bew.:

$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \pi_2 \circ h_2 \circ \varphi_1$:

ist bijektiv
differenzierbar,
Jacobische hat maximalen Rg.

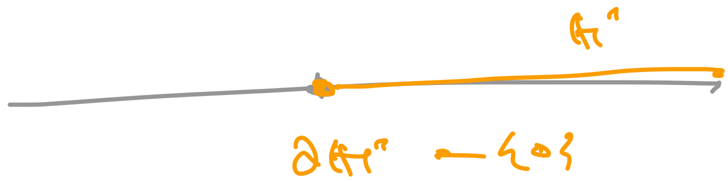
Dito.

$$\mathbb{H}^n = \{ x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0 \}$$

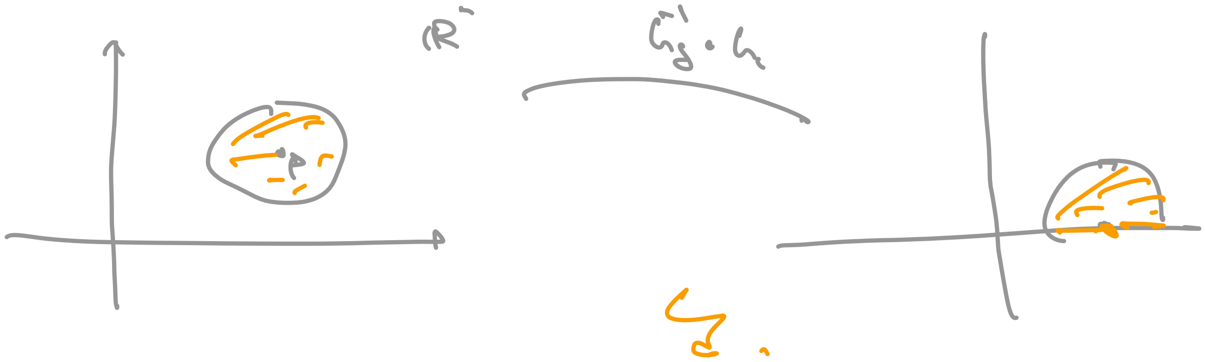


$$\partial\mathbb{H}^n = \{ x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0 \}$$

$\mathbb{H}^1$:



$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$:

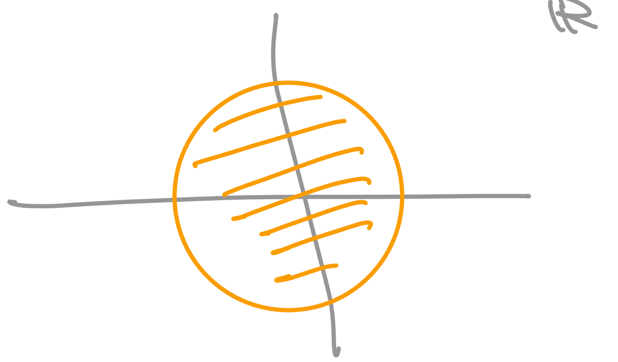


Bsp.: 1. Jede Mf ohne Rand:

immer (!) :

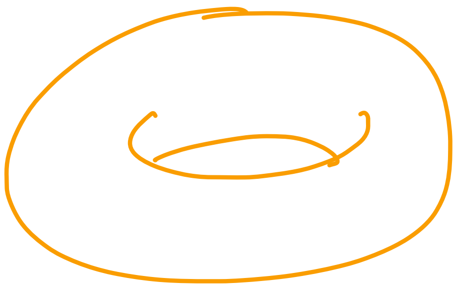
$$\partial M = \emptyset.$$

2. Jede abgeschlossene Kugel im $\mathbb{R}^n$



:

3.



Volltorus: 3-dim berandete Mf.

Achtung: ∂M ist nicht dasselbe wie der topologische Rand!