# 23

## Der Satz von Stokes

Wir übertragen nun den Fundamentalsatz von Ketten im $\mathbb{R}^n$ auf $n$-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeiten $M$ mit Rand, die in einem beliebigen euklidischen Raum eingebettet sind. Der Fundamentalsatz erhält dann die Form

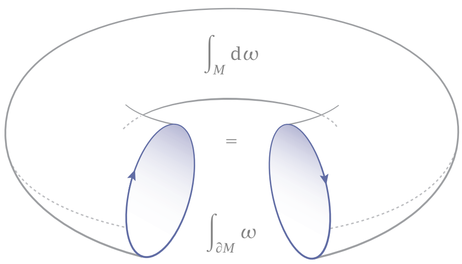
$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega$$

und wird als allgemeiner Satz von Stokes bezeichnet.

Für 3- und 2-dimensionale berandete Mannigfaltigkeiten enthält dieser den Satz von Gauss – auch Divergenzsatz genannt – und den klassischen Satz von Stokes als Spezialfälle, welche wir abschließend mithilfe der klassischen Linien-, Flächen- und Volumenelemente formulieren. In diesem Zusammenhang treten auch die Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes auf. Diese Bezeichnungen erhalten hier ihre Berechtigung.

Abb 1

Satz von Stokes



## 23.1 Mannigfaltigkeiten

Bisher betrachteten wir *gleichungsdefinierte Mannigfaltigkeiten*. Demnach ist eine nichtleere Teilmenge $M$ des $\mathbb{R}^{n+m}$ eine $f$-definierte Mannigfaltigkeit der Dimension $n$, wenn es eine stetig differenzierbare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^{n+m} \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ mit regulärem Wert $0$ gibt, so dass

$$M = f^{-1}(0).$$

Kurz, $M$ ist die Niveaumenge eines regulären Wertes einer glatten Funktion.

Wir verallgemeinern dieses Konzept nun dahingehend, dass wir dies von einer Mannigfaltigkeit nur noch *lokal* um jedem Punkt fordern. Dabei stehe im Folgenden *differenzierbar* der Einfachheit halber für *unendlich oft differenzierbar*.

**Definition** *Eine nichtleere Teilmenge $M$ des $\mathbb{R}^{n+m}$ heißt n-dimensionale Mannigfaltigkeit oder kurz n-Mannigfaltigkeit, wenn zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n+m}$ und eine differenzierbare Abbildung $f\colon W \to \mathbb{R}^m$ mit regulärem Wert $0$ existiert, so dass*

$$M \cap W = f^{-1}(0). \quad \rtimes$$

Aufgrund des Niveauflächensatzes $_{18.12}$ ist dies, lokal um jeden Punkt, äquivalent zur Existenz einer differenzierbaren Abbildung $\phi\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$, so dass

$$M \cap W = \Gamma(\phi)$$

der Graph von $\phi$ ist. Für das praktische Arbeiten mit Mannigfaltigkeiten ist allerdings folgende Charakterisierung nützlicher.

1 **Satz** *Eine nichtleere Teilmenge $M$ des $\mathbb{R}^{n+m}$ ist eine n-Mannigfaltigkeit genau dann, wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n+m}$ und einen Diffeomorphismus $h\colon W \to \mathbb{R}^{n+m}$ gibt, so dass*

$$h(M \cap W) \subset \mathbb{R}^n \times 0^m. \quad \rtimes$$

Man sagt, der Diffeomorphismus $h$ *trivialisert* die Mannigfaltigkeit um $p$.

⟨⟨⟨⟨⟨ $\Rightarrow$ Nach Umordnung der Koordinaten können wir annehmen, dass

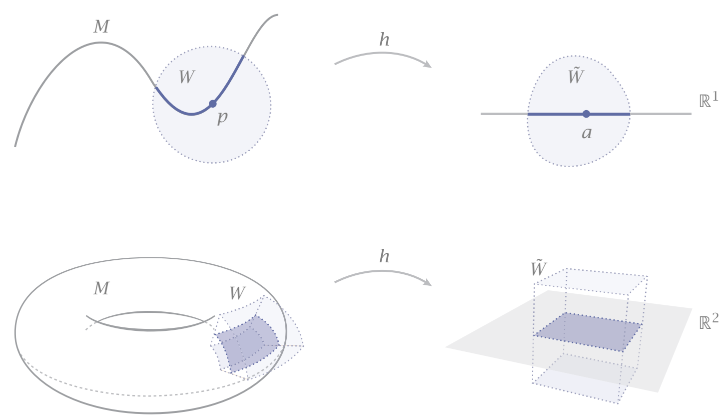
$$p = (u_0, v_0) \in U \times V = W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \qquad M \cap W = \Gamma(\phi)$$

mit einer differenzierbaren Abbildung $\phi\colon U \to V$ mit $\phi(u_0) = v_0$. Setzen wir

$$h\colon\ U \times V \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad (u, v) \mapsto (x, y) = (u, v - \phi(u)),$$

so ist $h$ injektiv und die Jacobimatrix $Dh$ in jedem Punkt regulär. Also ist $h$ ein Diffeomorphismus von $W$ auf eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ mit der

Abb 2 Ein- und zweidimensionale Mannigfaltigkeiten




Eigenschaft, dass

$$\begin{aligned} h(M \cap W) &= \{h(u,v) : (u,v) \in \Gamma(\varphi)\} \\ &= \{(x,y) : x \in U,\ y = 0\} \subset \mathbb{R}^n \times 0^m. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Sei $W$ eine Umgebung von $p$ und $h\colon W \to \Omega$ ein solcher Diffeomorphismus. Setzen wir

$$f = (h_{n+1}, .., h_{n+m}) : \ W \to \mathbb{R}^m,$$

so ist $f$ differenzierbar und $f(M \cap W) = 0^m$. Außerdem ist $0^m$ ein regulärer Wert, da der Rang von $Dh$ in allen Punkten maximal ist. ⟫⟫⟫

Eine Mannigfaltigkeit lässt sich auch durch die Existenz *lokaler Koordinaten* wie folgt charakterisieren.

2 **Satz** *Eine nichtleere Teilmenge $M$ des $\mathbb{R}^{n+m}$ ist eine n-Mannigfaltigkeit genau dann, wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n+m}$, ein Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine differenzierbare Abbildung $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{n+m}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:*

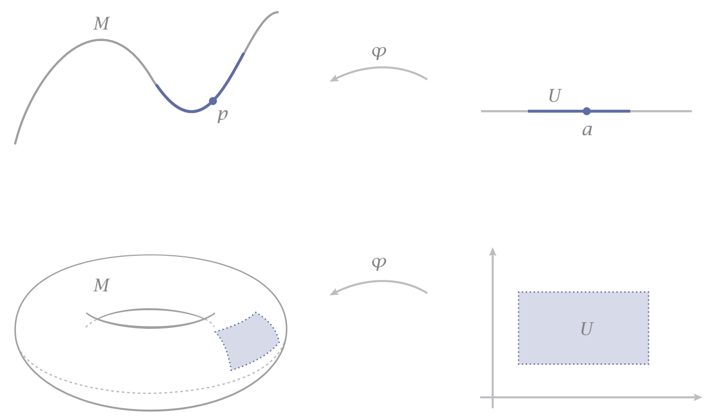
(K-1) *$\varphi$ ist injektiv mit* rang $D\varphi \equiv n$,

(K-2) $\varphi(U) = M \cap W$,

(K-3) *$\varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to U$ ist stetig.*

*Eine solche Abbildung $\varphi$ heißt lokales Koordinatensystem oder Karte um $p$.* ⋊

Abb 3 Ein- und zweidimensionales Koordinatensystem




Ist $M$ eine $n$-Mannigfaltigkeit, so existiert um jeden Punkt $p \in M$ eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n+m}$ und eine differenzierbare Abbildung $\phi \colon \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^m$, so dass $M \cap W = \Gamma(\phi)$. Dann ist

$$\varphi : \; U \to \mathbb{R}^{n+m}, \quad \varphi(x) = (x, \phi(x))$$

offensichtlich ein Koordinatensystem um $p$.

Sei nun umgekehrt $W$ eine Umgebung von $p$ und $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^{n+m}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften (k-1)–(k-3). Wir können dann die Koordinaten in $\mathbb{R}^{n+m}$ so umordnen, dass die Jacobimatrix von

$$\chi = (\varphi_1, .., \varphi_n)$$

im Punkt $a = \varphi^{-1}(p)$ regulär ist. Verkleinern wir nötigenfalls $U$, so erhalten wir einen Diffeomorphismus $\chi \colon U \to \tilde{U}$,

$$\tilde{\varphi} = \varphi \circ \chi^{-1} : \; \tilde{U} \to W$$

ist die Identität in den ersten $n$ Koordinaten, und es gilt

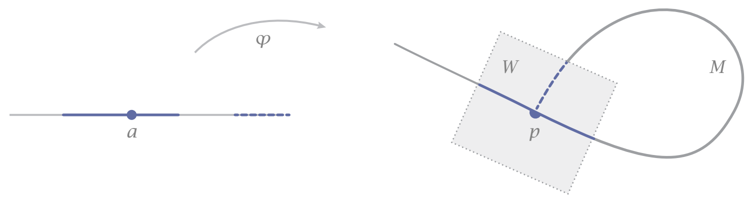
$$\varphi(U) = \tilde{\varphi}(\tilde{U}) = \Gamma(\phi),$$

wenn $\phi$ aus den letzten $m$ Koordianten von $\tilde{\varphi}$ besteht.

Außerdem existiert eine Umgebung $W$ von $p$, so dass $\Gamma(\phi) = M \cap W$. Denn andernfalls gäbe es eine Folge $(p_k)$ von Punkten auf $M$ mit $p_k \to p$ und $\varphi^{-1}(p_k) \notin U$. Dann aber ist $\varphi^{-1}$ im Punkt $p$ nicht stetig, im Widerspruch zu Annahme (k-3). Also ist $M$ eine $n$-Mannigfaltigkeit.

23.4

Abb 4 Keine Mannigfaltigkeit




*Bemerkung* Bedingung (K-3) ist erforderlich, um Gebilde wie in Abbildung 4 als Mannigfaltigkeit auszuschließen. Jede Umgebung $W$ von $p$ enthält auch Punkte auf den gestrichelten Ende von $M$, die gegen $p$ konvergieren. Entlang dieser Folge konvergiert $\varphi^{-1}$ jedoch nicht gegen $\varphi^{-1}(p)$, ist also unstetig. ⊸

⊳ *Beispiele für Mannigfaltigkeiten* A. Jede gleichungsdefinierte Mannigfaltigkeit im Sinne von Abschnitt 18.3 ist auch eine Mannigfaltigkeit in diesem Sinne. Die dortigen Beispiele sind also auch hier gültig.

B. Insbesondere ist jede 1-Punkt-Menge eine 0-Mannigfaltigkeit.

C. Jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist eine $n$-Mannigfaltigkeit. Als $n$-dimensionales Koordinatensystem um jeden Punkt genügt die Identitätsabbildung.

D. Die Oberfläche eines 2-Torus ist eine kompakte 2-Mannigfaltigkeit. ⊲

Wir halten noch fest, dass der Wechsel zwischen zwei Koordinatensystemen einen Diffeomorphismus definiert ist, wenn sich ihre Kartengebiete überlappen.

3 **Lemma** *Sei $M$ eine $n$-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{n+m}$. Sind*

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^{n+m}, \qquad \alpha = 1, 2,$$

*zwei überlappende Koordinatensysteme von $M$, also die Mengen*

$$V_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2)), \qquad \alpha = 1, 2,$$

*nicht leer, so sind die beiden Koordinatenwechsel*

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : V_1 \to V_2, \qquad \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : V_2 \to V_1,$$

*$n$-dimensionale Diffeomorphismen.* ⋊

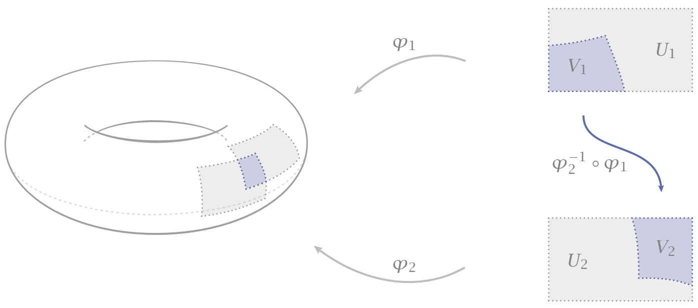
⟪⟪ Mit den Bezeichnungen des vorangehenden Beweises ist

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \pi_n \circ h_2 \circ \varphi_1 = \pi_n \circ h_2 \circ \psi_1|_{U_1 \times 0^m},$$

wobei $\pi_n$ die Projektion auf die ersten $n$ Koordinaten bezeichnet. Es ist dann

$$\det D(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)(a_1) \neq 0.$$

Abb 5 Koordinatenwechsel




Somit ist $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ ein lokaler Diffeomorphismus um $a_1$. — Aus Symmetriegründen gilt Entsprechendes auch für $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$. ⟫⟫⟫

■ **Mannigfaltigkeiten mit Rand**

Jeder Punkt einer $n$-Mannigfaltigkeit $M$ ist umgeben von einem $n$-dimensionalen Kartengebiet. In diesem Sinne ist jeder Punkt von $M$ ein *innerer Punkt* von $M$ und kein *Randpunkt*. Für den Satz von Stokes benötigen wir aber auch *Mannigfaltigkeiten mit Rand.*

Das euklidische Modell hierfür ist der abgeschlossene Halbraum

$$\mathbb{H}^n \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geqslant 0\}.$$

Jeder Punkt $x$ in $\mathbb{H}^n$ mit $x_n > 0$ ist ein innerer Punkt von $\mathbb{H}^n$, und der Rand dieses Halbraums ist die Hyperebene

$$\partial\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\} = \mathbb{R}^{n-1} \times 0^1.$$

So ist $\mathbb{H}^1$ das abgeschlossene Intervall $[0, \infty)$, und $\mathbb{H}^2$ die obere abgeschlossene Halbebene.

Abb 6 Eindimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand

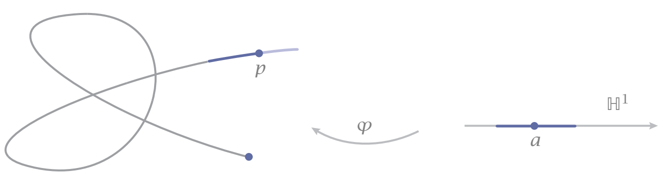
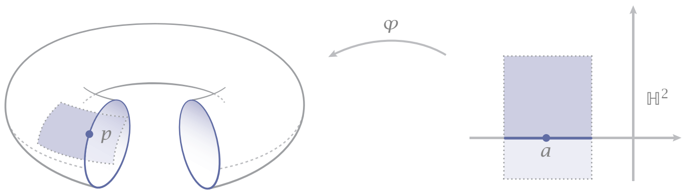


Abb 7 Zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand




4 **Definition** *Eine nichtleere Teilmenge $M$ des $\mathbb{R}^{n+m}$ heißt n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand oder kurz berandete n-Mannigfaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n+m}$ und einen Diffeomorphismus $h\colon W \to \mathbb{R}^{n+m}$ gibt, so dass entweder*

$$h(M \cap W) \subset \mathbb{R}^n \times 0^m \qquad (\iota)$$

*oder*

$$h(M \cap W) \subset \mathbb{H}^n \times 0^m, \qquad h(p) \in \partial\mathbb{H}^n \times 0^m. \qquad (\delta)$$

*Der Rand $\partial M$ von $M$ besteht aus allen Punkten in $M$ mit Eigenschaft $(\delta)$.* ⋊

Man beachte, dass beide Bedingungen nicht gleichzeitig erfüllt sein können. Denn gäbe es um ein und denselben Punkt $p$ Diffeomorphismen $h_\iota$ und $h_\delta$ mit den jeweiligen Eigenschaften, so wäre $h_\delta \circ h_\iota^{-1}$ ein Diffeomorphismus, der eine offene Umgebung von $h_\iota(p)$ auf eine nicht-offene Umgebung von $h_\delta(p)$ abbildet, was nicht möglich ist.

⊳ A. Jede Mannigfaltigkeit ist auch eine Mannigfaltigkeit mit Rand, ihr Rand ist in diesem Fall leer.

B. Jede abgeschlossene $n$-dimensionale Kugel im $\mathbb{R}^n$ ist eine kompakte berandete $n$-Mannigfaltigkeit, ihr Rand ist eine $n-1$-dimensionale Sphäre.

C. Ein Volltorus ist eine kompakte berandete 3-Mannigfaltigkeit, sein Rand ist ein ›hohler‹ 2-dimensionaler Torus. ⊲

*Achtung* Der Mannigfaltigkeiten-Rand ist nicht zu verwechseln mit dem topologischen Rand $_{7.23}$. Ist zum Beispiel $D$ eine abgeschlossene Kreisscheibe im $\mathbb{R}^3$, so ist ihr Mannigfaltigkeiten-Rand eine Kreiskurve, aber ihr topologischer Rand ist ganz $D$. ⊸