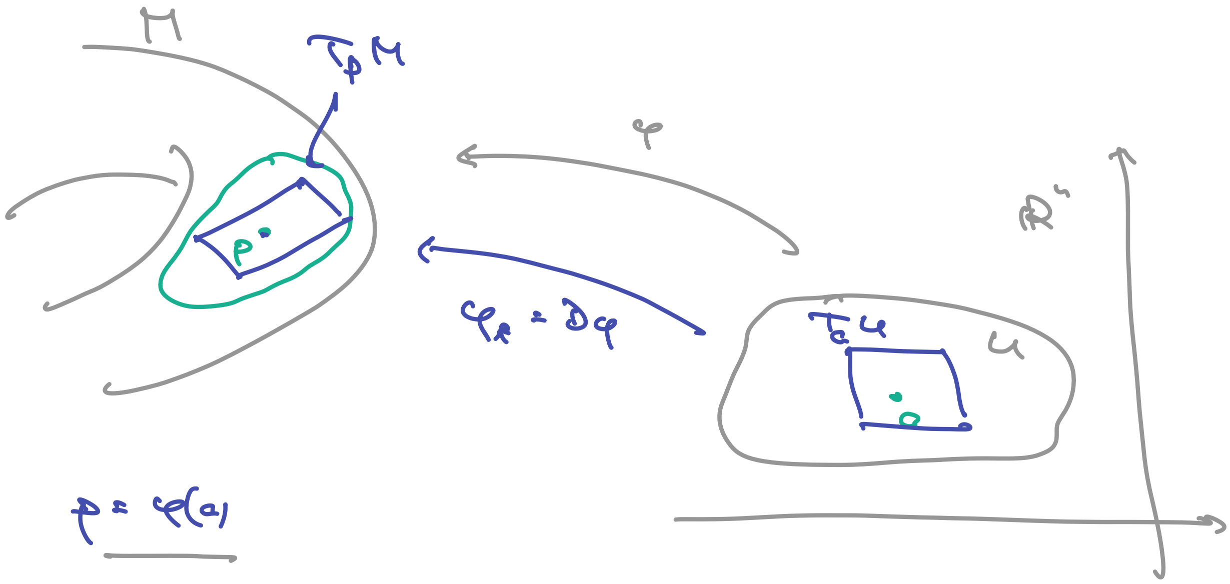
21. Vorlesung 13.1.2022

$$\varphi : \mathbb{R}^n \supset U \longrightarrow W \subset \mathbb{R}^{n+m}$$



$p = \varphi(a)$

$\varphi_*(T_a\mathbb{R}^n)$ ist ein n-dim. UR von $\mathbb{R}^{n+k}$

Unabhängigkeit von φ !

Sei

$$\tilde\varphi : \tilde U \longrightarrow W$$

ein weiteres KS mit $p = \tilde\varphi(\tilde a)$.

Dann

$$\chi = \tilde\varphi^{-1} \circ \varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Diffeomorphismus

Daraus folgt:

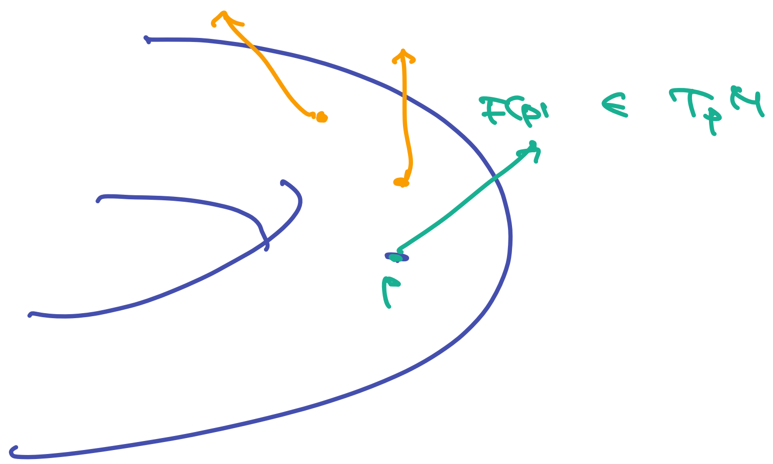
$$\varphi = \tilde\varphi \circ \chi$$

$$\varphi_* = \tilde\varphi_* \circ \chi_*$$

(Isomorphismus von $\mathbb{R}^n$)

$$\Rightarrow \quad \varphi_*(T_a U) = \tilde\varphi_*(T_{\tilde a}\tilde U) .$$

da [illegible] von $\mathbb{R}^{n\times n}$ [illegible]



Ziel: F glatte Funktion nur definiert auf $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

Sei $\varphi : U \to M$ lokale KS.
Dann ex. ein eindeutiges VF ξ auf U:

$$\boxed{F \circ \varphi = D\varphi \cdot \xi}$$

$$\Lambda^k_p M := \Lambda^k_p \mathbb{R}^{n+m}\Big|_{T_pM}$$

$$\Lambda^k M := \bigcup_{p\in M} \Lambda^k_p M .$$

Eine Differentialform vom Grad k, — k-Form — auf M ist dann eine Abbildung

$$\omega : M \longrightarrow \Lambda^k M$$

$$\omega(p) \in \Lambda^k_p M$$

so dass

$$\boxed{\pi \circ \omega = \mathrm{id}_M .}$$

Darstellung:

$$\boxed{\omega = \sum_{1\le\mu_1\le\dots\le\mu_k\le n+m} \omega_{\mu_1\dots\mu_k}\, \underbrace{dx^{\mu_1}\wedge\dots\wedge dx^{\mu_k}}_{k}}$$

Beweis: Seien

$$w_1, \dots, w_n \in T_p M.$$

Ein KS φ um $p = \varphi(a)$ fest. Dann

seien

$$v_\mu = \varphi^* w_\mu \in T_a \mathbb{R}^n, \quad p = \varphi(a)$$

$$\Longleftrightarrow \quad w_\mu = \varphi_* v_\mu.$$

Dann definiere $d\omega$ durch:

$$d\omega(w_1, \dots, w_n)$$

Def.

$$= d\omega(\varphi_* v_1, \dots, \varphi_* v_n)$$

$$= (\varphi^* d\omega)(v_1, \dots, v_n)$$

$$= \underbrace{d(\underbrace{\varphi^* \omega}_{\text{auf } \mathbb{R}^n})}_{\text{gewöhnliches "d"}}(v_1, \dots, v_n) \quad \text{wohldefiniert}$$

Also:

$$d\omega(w_1, \dots, w_n) := d(\varphi^* \omega)(\varphi^* w_1, \dots, \varphi^* w_n). \quad \blacksquare$$

$p \in M$: Orientierung im Tangentialraum

T_pM : $\rho(p) := [v_1, \dots, v_n](p)$

$\rho(p)$ muss kompatibel sein:

Wechsel der KS kein Problem:

$$\rho := [\varphi_* e_1, \dots, \varphi_* e_n]$$

oder

$$\rho := -[\varphi_* e_1, \dots, \varphi_* e_n].$$

global

Bsp: Gleichungsdef. Mf

$$M = f^{-1}(0)$$

Seien immer erfüllt:

$$n_k = \nabla f_k \,, \quad 1 \le k \le m$$

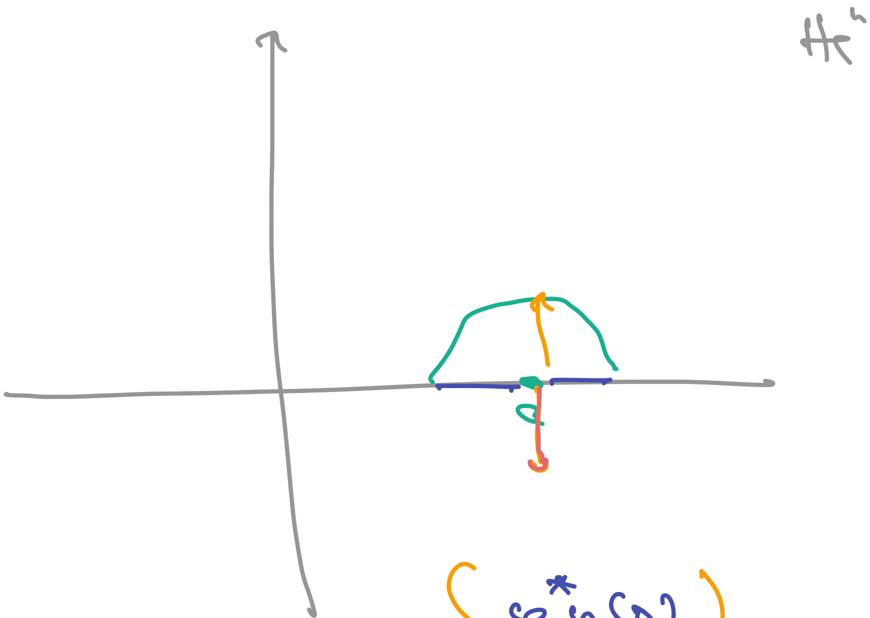
sind Normalen an M:

$$n_k \in T_p^{\perp} M.$$

Stetig auf ganz M.

Dann existiert eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ auf TM:

$$(v_1, \dots, v_n, n_1, \dots, n_m) \overset{?}{=} (e_1, \dots, e_{n+m}).$$



$\left(\varphi^* u(p)\right)_{\text{[illegible]}} < 0.$

[illegible].

Beweis: Orientierung für $T_p\partial M$

wird ... als positiv:

Seien $v_1, \dots, v_{n-1}$ und $w_1, \dots, w_{n-1}$

zwei Basen für $T_p\partial M$ mit

$$[u, v_1, \dots, v_{n-1}] = [u, w_1, \dots, w_{n-1}].$$

Betrachte die Basiswechsel T:

$\det T > 0$, $Tu = u$.

Basisdarstellung:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

$\det T > 0 \Rightarrow \det A > 0$

$\Rightarrow [v_1, \dots, v_{n-1}] = [w_1, \dots, w_{n-1}].$