## 23.2 Vektorfelder, Formen und Orientierung

Ausgehend von der Beschreibung einer Mannigfaltigkeit durch lokale Koordinaten definieren wir nun Konstrukte wie Tangentialräume, Differenzialformen und Orientierungen auf Mannigfaltigkeiten.

### ▪ Tangentialbündel und Vektorfelder

Sei $M$ eine $n$-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{n+m}$ und

$$\varphi : \ \mathbb{R}^n \supset U \to W \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

ein lokales Koordinatensystem um einen Punkt $p \in M$. Der Tangentialraum im Punkt $a = \varphi^{-1}(p)$ ist der Raum $\mathbb{R}^n$ selbst, den wir uns mit seinem Nullpunkt an den Punkt $a$ angeheftet vorstellen. Die Tangentialabbildung $\varphi_* \coloneqq D\varphi$ bildet diesen in einen Unterraum des $\mathbb{R}^{n+m}$ ab, den wir uns mit seinem Nullpunkt am Punkt $p$ angeheftet vorstellen. Diese Abbildung

$$\varphi_* : \ T_a\mathbb{R}^n \to T_p\mathbb{R}^{n+m}, \qquad v \mapsto D\varphi(a)\, v$$

ist injektiv, da $D\varphi$ maximalen Rang hat.

Das Bild $\varphi_*(T_a\mathbb{R}^n)$ ist also ein $n$-dimensionaler Unterraum von $T_p\mathbb{R}^{n+m}$. Dieser Raum hängt *nicht* von der Wahl der Koordinaten ab. Ist $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to W$ ein weiteres Koordinatensystem um $p$, so ist

$$\chi = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi : \ \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$$

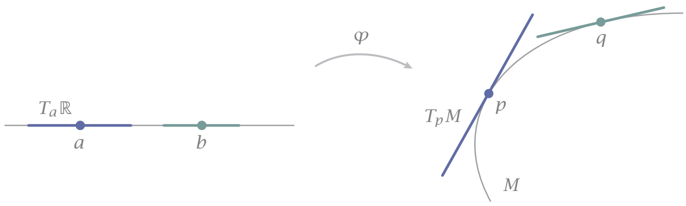
ein lokaler Diffeomorphismus um $a$ 22.3. Damit ist

$$\varphi = \tilde{\varphi} \circ \chi, \qquad \varphi_* = \tilde{\varphi}_* \circ \chi_*.$$

Da $\chi_*$ den Raum $T_a\mathbb{R}^n$ isomorph auf den Raum $T_{\tilde{a}}\mathbb{R}^n$ mit $\tilde{a} = \chi(a)$ abbildet, folgt

$$\varphi_*(T_a\mathbb{R}^n) = \tilde{\varphi}_*(T_{\tilde{a}}\mathbb{R}^n).$$

Abb 8 Tangentialräume




23.8

Somit hängt dieser Raum nicht vom Koordinatensystem ab, und folgende Definition ist gerechtfertigt.

**Definition** *Sei $M$ eine $n$-Mannigfaltigkeit. Ist $\varphi\colon U \to W$ ein Koordinatensystem um $p = \varphi(a) \in M$, so heißt*

$$T_pM \coloneqq \varphi_*(T_a\mathbb{R}^n)$$

*der Tangentialraum von $M$ an der Stelle $p$. Die Vereinigung*

$$TM \coloneqq \bigcup_{p\in M} T_pM$$

*aller dieser Tangentialräume heißt das Tangentialbündel von $M$.* ⋊

Für gleichungsdefinierte Mannigfaltigkeiten stimmt diese Definition mit der früheren ${}_{18.17}$ überein.

**Definition** *Ein Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit $M$ ist eine Abbildung*

$$F\colon\; M \to TM$$

*mit der Eigenschaft, dass $F(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$.* ⋊

Ein Vektorfeld $F\colon M \to TM$ ordnet also jedem Punkt $p \in M$ einen Vektor im *darüberliegenden* Tangentialraum $T_pM$ zu. Ist

$$\pi\colon\; TM \to M, \quad T_pM \mapsto p$$

die kanonische Projektion des Tangentialbündels auf den Fußpunkt eines jeden Tangentialraumes, so gilt also

$$\pi \circ F = id_M.$$

Abbildungen dieser Art werden als *Schnitte* in einem Bündel über $M$ bezeichnet.

Ein Vektorfeld $F$ auf $M$ ist nicht notwendigerweise auf einer Umgebung von $M$ erklärt. Somit ist *a priori* nicht klar, wann $F$ differenzierbar heißen soll. Dazu greifen wir auf lokale Koordinatensysteme zurück. — In jedem lokalen Koordinatensystem $\varphi\colon U \to W$ existiert ein eindeutiges Vektorfeld $G$ auf $U$ mit

$$F \circ \varphi = D\varphi \cdot G.$$

Für dieses Vektorfeld schreibt man auch

$$\varphi^*F \coloneqq D\varphi^{-1}F \circ \varphi\colon\; U \to TU$$

und nennt es das auf $U$ *zurückgeholte Vektorfeld*. Wir *definieren* dann ein Vektorfeld auf $M$ als *differenzierbar*, wenn es zu jedem Punkt ein Koordinatensystem gibt, in dem das zurückgeholte Vektorfeld im üblichen Sinne differenzierbar ist.

Da der Wechsel zwischen verschiedenen Koordinatensystemen differenzierbar ist, hängt diese Definition nicht von deren Wahl ab.

### Differenzialformen

Fassen wir den Tangentialraum $T_pM$ als Unterraum von $T_p\mathbb{R}^{n+m}$ auf, so ist der Raum $\Lambda_p^kM$ der alternierenden $k$-Formen im Punkt $p$ nichts anderes als die Einschränkung dieser $k$-Formen auf $T_pM$. Das Bündel aller dieser Räume ist

$$\Lambda^kM \coloneqq \bigcup_{p\in M} \Lambda_p^kM.$$

Eine *Differenzialform vom Grad $k$* oder kurz *$k$-Form* auf einer Mannigfaltigkeit $M$ ist dann eine Abbildung

$$\omega : \ M \to \Lambda^kM$$

mit der Eigenschaft, dass $\pi \circ \omega = id_M$. Diese können wir darstellen als

$$\omega = \sum_{1\leqslant\mu_1<..<\mu_k\leqslant n+m} \omega_{\mu_1,..,\mu_k} \mathrm{d}x_{\mu_1} \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_{\mu_k},$$

wobei die Komponentenfunktionen $\omega_{\mu_1}, .., \omega_{\mu_k}$ im Allgemeinen nur auf $M$ erklärt sind. Differenzierbarkeit und äußere Ableitung müssen wir daher wieder durch Rückgriff auf lokale Koordinaten erklären.

So heißt $\omega$ differenzierbar, wenn es zu jedem Punkt ein Koordinatensystem gibt, in dem die zurückgeholte Form im üblichen Sinne differenzierbar ist. Da der Wechsel zwischen verschiedenen Koordinatensystemen differenzierbar ist, hängt diese Definition nicht von deren Wahl ab. Etwas mehr Sorgfalt erfordert die Definition der äußeren Ableitung.

23.10 **Satz und Definition** *Zu jeder differenzierbaren $k$-Form $\omega$ auf einer Mannigfaltigkeit $M$ existiert genau eine $k+1$-Form $\mathrm{d}\omega$ auf $M$, so dass*

$$\varphi^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(\varphi^*\omega)$$

*in jedem Koordinatensystem $\varphi$ auf $M$. Diese Form heißt die äußere Ableitung von $\omega$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Wir definieren $\mathrm{d}\omega$ durch seine Wirkung auf $k+1$ Tangentialvektoren

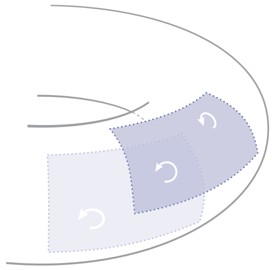
$$w_1, .., w_{k+1} \in T_pM.$$

In einem Koordinatensystem $\varphi$ um $p = \varphi(a)$ gehen diese über in die Vektoren

$$v_\mu = \varphi^* w_\mu \in T_a\mathbb{R}^n, \qquad 1 \leqslant \mu \leqslant k+1.$$

Abb 9

Zwei Kartengebiete mit Orientierung



*Existierte* das äußere Differenzial $\mathrm{d}\omega$ in der üblichen Weise, so wäre nun 22.8

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(w_1,..,w_{k+1}) &= \mathrm{d}\omega(\varphi_* v_1,..,\varphi_* v_{k+1})\\ &= (\varphi^*\mathrm{d}\omega)(v_1,..,v_{k+1})\\ &= \mathrm{d}(\varphi^*\omega)(v_1,..,v_{k+1}).\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck existiert aber in jedem Fall, wenn wir $\omega$ als differenzierbar voraussetzen. Wir *definieren* also die $k+1$-form $\mathrm{d}\omega$ durch

$$\mathrm{d}\omega(w_1,..,w_{k+1}) \coloneqq \mathrm{d}(\varphi^*\omega)(\varphi^* w_1,..,\varphi^* w_{k+1}).$$

In der üblichen Weise zeigt man, dass dies nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängt. »»»

## ▪ Orientierung

Für die Integrationstheorie und den Satz von Stokes müssen wir Mannigfaltigkeiten noch mit einer Orientierung versehen. Dazu treffen wir folgende

**Vereinbarung** *Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ sei mit der Orientierung der Standardbasis $[e_1,..,e_n]$ sowie dem Standardskalarprodukt $\langle v, w\rangle$ versehen.* $\rtimes$

Einem einzelnen Punkt $p$ einer Mannigfaltigkeit $M$ ordnen wir eine Orientierung zu, indem wir den Tangentialraum $T_pM$ mit einer Orientierung

$$\varrho(p) \coloneqq [v_1,..,v_n](p)$$

versehen, also eine angeordnete Basis $(v_1,..,v_n)$ von $T_pM$ auswählen. Natürlich ist es nicht sinnvoll, dabei völlig willkürlich vorzugehen. Vielmehr sollte die Wahl dieser Orientierungen in einer konsistenten Weise erfolgen.

Innerhalb *eines* Koordinatensystems $\varphi$ ist dies kein Problem. Hier nennen wir eine Wahl von Orientierungen konsistent, wenn auf dem gesamten Kartengebiet entweder $\varrho = [\varphi_* e_1,..,\varphi_* e_n]$ oder $\varrho = -[\varphi_* e_1,..,\varphi_* e_n]$ gilt – also *alle*

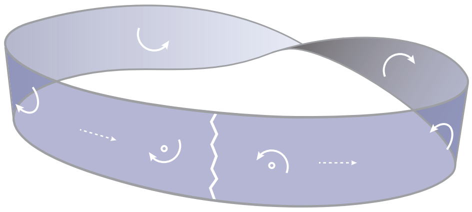


Abb 10

Das Möbiusband

Orientierungen entweder mit der Standardorientierung des $\mathbb{R}^n$ übereinstimmen oder entgegengesetzt sind.

Eine solche konsistente Wahl können wir immer erreichen, indem wir $\varrho$ auf dem Kartengebiet auf eine dieser beiden Weisen einfach *festlegen*. Haben wir aber eine solche Wahl getroffen, so pflanzt sie sich über überlappende Koordinatensysteme hinweg auf ganz $M$ fort. Und dies kann zu Konflikten führen.

⊳ Das *Möbiusband* entsteht, indem man die Enden eines Papierstreifen nach einer halben Drehung zusammenklebt. Beide Seiten des Papierbandes bilden dann eine einzige Fläche. Diese ist *nicht orientierbar*. Denn wählen wir in einem beliebigen Punkt $p$ eine Orientierung, so führt deren stetige Fortsetzung nach einem Umlauf um das Band zur entgegengesetzten Orientierung in $p$. Eine überall konsistente Wahl von Orientierungen ist daher nicht möglich. ⊲

**Definition** *Eine Mannigfaltigkeit $M$ heißt orientierbar, wenn jedem Punkt eine Orientierung so zugeordnet werden kann, dass sie in jedem lokalen Koordinatensystem konsistent ist. Eine Mannigfaltigkeit mit einer solchen Wahl heißt orientierte Mannigfaltigkeit.* ⋊

⊳ Eine gleichungsdefinierte Mannigfaltigkeit $M = f^{-1}(0)$ ist orientierbar. Denn die Gradienten der Komponentenfunktionen,

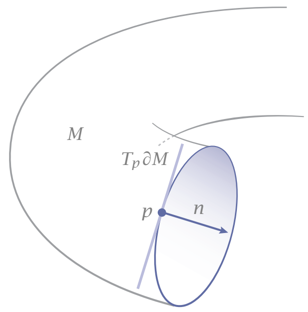
$$n_k = \nabla f_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

bilden eine stetige Familie von Normalenvektoren an $M$ und fixieren damit eine konsistente Orientierung $[n_1, .., n_m]$ des Normalenbündels $T^{\perp}M$. Dies induziert eine konsistente Orientierung $[v_1, .., v_n]$ des Tangentialbündels, indem wir fordern, dass

$$[v_1, .., v_n, n_1, .., n_m] = [e_1, .., e_{n+m}]. \quad ⊲$$

Abb 11

Tangentialraum und äußere Normale an einem Randpunkt




## ▪ Mannigfaltigkeiten mit Rand

Unsere Definitionen von Tangentialraum, Vektorfeldern und Differenzialformen übertragen sich ohne große Mühe auf Mannigfaltigkeiten mit Rand. Bei der Orientierung ergibt sich dabei ein zusätzlicher Aspekt.

Sei $M$ eine $n$-Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist $\partial M$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$, denn in jedem Koordinatensystem um einen Randpunkt $p$ von $M$ ist er das Bild eines Teils von $\partial\mathbb{H}^n$. Für die Tangentialräume gilt daher

$$T_p(\partial M) \subset T_pM.$$

Genauer ist $T_p(\partial M)$ ein linearer Unterraum von $T_pM$ der Kodimension $1$. Somit ist $T_p^\perp(\partial M) \cap T_pM$ ein eindimensionaler Unterraum, und es existieren genau zwei normierte Tangentialvektoren, die senkrecht auf der Randmannigfaltigkeit stehen. Von diesen zeigt genau einer nach *außen*. In einem Koordinatensystem $\varphi$ um den Randpunkt $p$ ist dies gleichbedeutend damit, dass die letzte Komponente des zurückgeholten Normalenvektors $\varphi^*n(p)$ negativ ist. Diese Charakterisierung ist koordinatenunabhängig, denn jedes Koordinatensystem um einen Randpunkt bildet sowohl $\partial\mathbb{H}^n$ als auch $\mathbb{H}^n$ in sich ab.

**Satz und Definition** *Ist $M$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand, so existiert in jedem Randpunkt $p$ von $M$ ein eindeutiger auswärts gerichteter Normaleneinheitsvektor $n(p)$, kurz äußere Normale genannt.* ⋊

Mithilfe der äußeren Normalen können wir auf einer *orientierten* Mannigfaltigkeit mit Rand eine eindeutige *induzierte Orientierung* des Randes erklären.

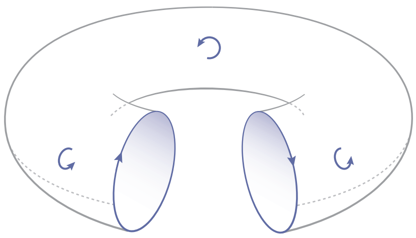
**Satz und Definition** *Sei $M$ eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist auch der Rand $\partial M$ eine orientierte Mannigfaltigkeit, und die induzierte Orientierung $\partial\varrho$ im Punkt $p \in \partial M$ ist gegeben durch*

$$(\partial\varrho)(p) = [v_1, .., v_{n-1}]$$

23.13

Abb 12

Induzierte Orientierung des Randes



*mit denjenigen Basen* $(v_1, .., v_{n-1})$ *von* $T_p\partial M$*, für die*

$$[n, v_1, .., v_{n-1}](p) = \varrho(p). \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Damit diese Festlegung sinnvoll ist, müssen wir zeigen, dass verschiedene Basen von $T_p\partial M$ mit dieser Eigenschaft gleichorientiert sind. Seien also $(v_1, .., v_{n-1})$ und $(w_1, .., w_{n-1})$ zwei Basen von $T_p\partial M$ mit

$$[n, v_1, .., v_{n-1}] = [n, w_1, .., w_{n-1}].$$

Ein Basiswechsel zwischen diesen beiden Basen ist eine lineare Transformation $T$ mit $\det T > 0$ und $Tn = n$. Also hat $T$ die Blockmatrixdarstellung

$$T = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

mit einer $(n-1) \times (n-1)$-Matrix $A$. Also ist auch $\det A > 0$ und somit

$$[v_1, .., v_{n-1}] = [w_1, .., w_{n-1}]. \quad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

*Bemerkung* Die Bedingung an den Vektor $n$ ist so gewählt, dass der Rand einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit in der Ebene *positiv*, und die Oberfläche einer Kugel, von außen gesehen, wie die euklidische Ebene orientiert ist Abb 13. ⊸

Abb 13

Induzierte Orientierung des Randes einer Fläche und des Volltorus