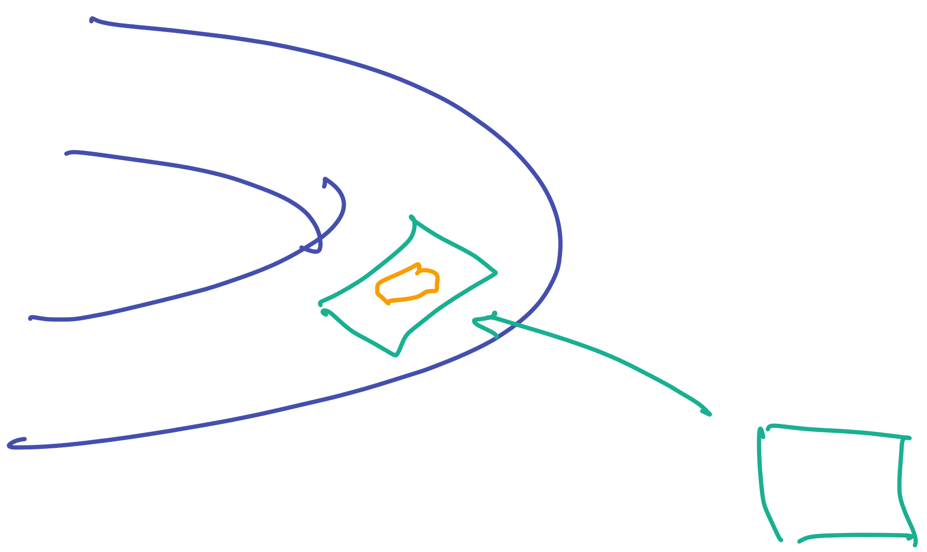
22. Vorlesung 19. 1. 2022

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

$$\begin{tikzcd} \varphi : U \arrow[r] & W \\ \tilde{U} \arrow[u, "\lambda"] & \end{tikzcd}$$

$$\tilde{U} \supset \mathbb{H}^n$$

$$\varphi|_{\mathbb{H}^n} = c$$



Beweis: Sei

$$U_\alpha = c_\alpha^{-1}(\operatorname{supp}\omega), \qquad \alpha = 1, 2$$

Dann

$$\varphi = c_2^{-1} \circ c_1 : U_1 \longrightarrow U_2$$

ein Diffeomorphismus mit

$$c_1 = c_2 \circ \varphi$$

Daraus folgt:

$$\int_{c_1} \omega = \int_{\mathbb{R}^k} c_1^* \omega = \int_{U_1} c_1^* \omega$$

$$= \int_{U_1} \varphi^* c_2^* \omega .$$

Hierbei ist

$$c_2^* \omega = f(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

und

$$\varphi^*(f\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$$

$$= (f \circ \varphi)(\det D\varphi)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Da φ Orientierung erhält:

$$\det D\varphi = |\det D\varphi| > 0.$$

Gilt $\quad \underline{\chi(U_1)} = \underline{\underline{U_2}}$:

$$\int_{U_1} \chi^* c_2^* \omega = \int_{U_1} \chi^* (f \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$$

$$= \int_{U_1} (f \circ \chi) \, |\det D\chi| \, d\lambda_n$$

$$\underset{\text{Trafo}}{=} \int_{U_2} f \, d\lambda_n$$

$$= \int_{\Delta^n} c_2^* \omega$$

$$= \int_{c_2} \omega \, . \qquad \blacksquare$$

Beweis: Sei S eine zweite Zerlegung der Eins. Dann gilt für jedes $\tau \in T$ und $\sigma \in S$:

$$S_\tau = \{\sigma \in S : \sigma\tau \not\equiv 0\}$$

$$T_\sigma = \{\tau \in T : \tau\sigma \not\equiv 0\}$$

sind endlich. Daher gilt:

$$\tau = \tau \cdot \underbrace{\sum_{\sigma \in S} \sigma}_{1} = \sum_{\sigma \in S_\tau} \tau\sigma$$

$$\sigma = \sigma \underbrace{\sum_{\tau \in T_\sigma} \tau} = \underbrace{\sum_{\tau \in T_\sigma} \sigma\tau}.$$

endliche Summen.

Daraus folgt:

$$\sum_{\tau \in T} \int_M \tau\omega = \sum_{\tau \in T} \left(\sum_{\sigma \in S_\tau} \int_M \tau\sigma\omega \right)$$

$$= \sum_{\sigma \in S} \left(\sum_{\tau \in T_\sigma} \int \sigma\tau\omega \right)$$

$$= \sum_{\sigma \in S} \int_M \sigma\omega. \quad \blacksquare$$

Bem.: Falsch, falls M nicht kompakt:

Denn ist

$$M \setminus \partial M =: \tilde{M}$$

ein Mf, mit $\partial \tilde{M} = \emptyset$,

kompakt sein

Also:

$$\int_{\partial \tilde{M}} \omega = 0 \quad \text{für alle } \omega$$

Aber es gibt ω mit

$$\int_{\tilde{M}} d\omega \neq 0. \qquad ↯$$

Beweis: 1. Es gibt ein Würfel

$$c \subset M \setminus \partial M$$

mit

$$\operatorname{supp} \omega \subset c(I^k).$$

Dann gilt:

$$\underbrace{\int_c d\omega} = \int_{I^k} c^*(d\omega)$$

$$= \int_{I^k} d(c^*\omega)$$

$$= \int_{\partial I^k} c^*\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Fund.

Da in diesem Fall $\omega = 0$ auf ∂c:

$$\underbrace{\int_M d\omega} = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = 0.$$

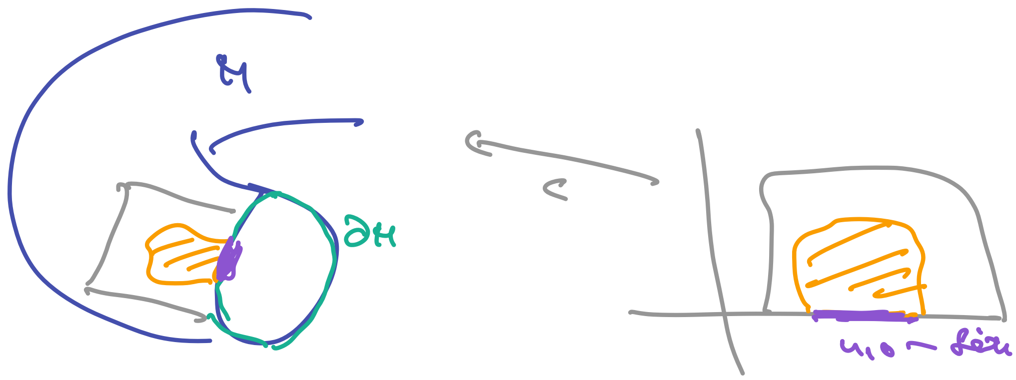
Da $\operatorname{supp} \omega \subset M \setminus \partial M$:

$$\underbrace{\int_{\partial M} \omega} = 0.$$

2. Fall:

$$\operatorname{supp} \omega \subset c(H^n),$$

wobei c genau eine Seite auf ∂M:



∂M liegt auf $(n,0)$-Seite.

Wir wählen so an:

$$c_{n,0} \subset \partial M.$$

Da c eine Orientierung von M erhält:

$$\rho_M = [\partial_1 c, \dots, \partial_n c]$$

Die $\underline{(n,0)\text{-Seite}}$ von c ist

$$\underline{\tilde{c}} := c \circ I^n_{n,0} = c\big|_{x_n = 0}.$$

Also [illegible]

$$\partial_k \tilde{c} = \partial_k c, \qquad 1 \le k \le n-1,$$

[illegible]:

$-\partial_n c$ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] M

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:

$$\rho\partial M = [\, n, \partial_1 \tilde{c}, \ldots, \partial_{n-1} \tilde{c} \,]$$

$$= -[\, \partial_n c, \partial_1 c, \ldots, \partial_{n-1} c \,]$$

$$= -(-1)^{n-1} [\, \partial_1 c, \ldots, \partial_n c \,]$$

$$= (-1)^n \rho M .$$

Also:

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega \underset{\text{[illegible]}}{=} (-1)^n \int_{\partial c} \omega$$

$$= \int_{c_{n,0}} \omega = \int_{\partial M} \omega .$$

3. Fall Zerlegung der Eins τ:

$\tau \in T$: $\tau\omega$ trägt auf wie im zweiten Fall an.

Da M kompakt: T endlich wählbar.

Für die konstante Funktion 1 gilt dann:

$$0 = d(1) = d\Big(\sum_{\tau\in T}\tau\Big) = \sum_{\tau\in T} d\tau.$$

Daher gilt auch:

$$\sum_{\tau\in T} \underline{d\tau\wedge\omega} = 0.$$

Damit erhalten wir:

$$\int_M d\omega = \sum_{\tau\in T}\int_M \tau\, d\omega$$

$$= \sum_{\tau\in T}\int_M \left(\tau\, d\omega + d\tau\wedge\omega\right)$$

$$= \sum_{\tau \in T} \int_M d(\tau\omega)$$

$$= \sum_{\tau \in T} \int_{\partial M} \tau\omega$$

1. 2.

$$= \int_{\partial M} \omega . \qquad \blacksquare$$

Nabla:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix}$$

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

Dann

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F$$

$$= \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3 .$$

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \ldots \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix}$$

Beweis:

$$df = \partial_1 f \, dx_1 + \partial_2 f \, dx_2 + \partial_3 f \, dx_3$$

$$= (\mathrm{grad}\, f) \cdot d\vec{s}$$

$$d(\vec{F} \cdot d\vec{s})$$

$$= d(F_1 \, dx_1 + F_2 \, dx_2 + F_3 \, dx_3)$$

$$= \partial_2 F_1 \, dx_2 \wedge dx_1 + \partial_3 F_1 \, dx_3 \wedge dx_1$$

$$+ \partial_1 F_2 \, dx_1 \wedge dx_2 + \partial_3 F_2 \, dx_3 \wedge dx_2$$

$$+ \dots$$

$$= (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) \cdot dx_1 \wedge dx_2$$

$$+ \dots$$

$$= (\mathrm{rot}\, \vec{F}) \cdot d\vec{A}$$

$$d(\vec{F} \cdot d\vec{A})$$

$$= d(F_1\, dx_2 \wedge dx_3 + F_2\, dx_3 \wedge dx_1 + F_3\, dx_1 \wedge dx_2)$$

$$= \partial_1 F_1\, \underline{dx_1 \wedge dx_2} \wedge dx_3 + \partial_2 F_2\, dx_2 \wedge \underline{dx_3 \wedge dx_1} + \dots$$

$$= (\partial_1 F_1 + \dots + \partial_3 F_3)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

$$= \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV$$

$$0 = d^2 f = d(df)$$

$$= d(\operatorname{grad} f \cdot d\vec{s})$$

$$= \underbrace{(\operatorname{rot} \operatorname{grad} f)}_{=0} \cdot d\vec{A}$$

$$0 = d^2(\vec{F} \cdot d\vec{s})$$

$$= d(\operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A})$$

$$= \underbrace{(\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F})}_{=0} \cdot dV$$