23.3 Der Satz von Stokes

Wir betrachten nun das Integral einer n-Form ω über eine n-Mannigfaltigkeit M. Dabei betrachten wir zuerst den Fall, dass der Träger von ω ganz in einem n-Würfel c enthalten ist, der sich durch Einschränkung eines Koordinatensystem φ auf den Standardwürfel ergibt, also durch

$$c = \varphi|_{\mathbb{I}^n}$$

gegeben ist. Dies ist keine wesentliche Einschränkung, da sich jedes Koordinatensystem durch Verschieben und Strecken der Koordinaten in ein Koordinatensystem $\varphi : U \to W$ mit $U \supset \mathbb{I}^n$ überführen lässt. Ist M orientierbar, so heißt c *orientierungserhaltend*, wenn es φ ist. Nur solche Würfel wollen wir im Folgenden betrachten und definieren hierfür

$$\int_M \omega \coloneqq \int_c \omega = \int_{\mathbb{I}^n} c^* \omega = \int_{\mathbb{I}^n} \varphi^* \omega.$$

Dieses Integral hängt nicht vom Koordinatensystem ab.

Lemma *Sei ω eine n-Form auf der orientierten n-Mannigfaltigkeit M. Sind c_1 und c_2 zwei orientierungserhaltende n-Würfel in M und*

$$\operatorname{supp} \omega \subset c_1(\mathbb{I}^n) \cap c_2(\mathbb{I}^n),$$

so gilt

$$\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega. \qquad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $V_\alpha = c_\alpha^{-1}(\operatorname{supp} \omega)$ für $\alpha = 1, 2$. Dann ist

$$\chi \coloneqq c_2^{-1} \circ c_1 : V_1 \to V_2$$

ein Diffeomorphismus $_3$ mit $c_1 = c_2 \circ \chi$, und es gilt

$$\int_{c_1} \omega = \int_{\mathbb{I}^n} c_1^* \omega = \int_{V_1} c_1^* \omega = \int_{V_1} \chi^* c_2^* \omega.$$

Hierbei ist $c_2^* \omega = f \, \mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n$ mit einer Funktion f auf V_2 und 22.6

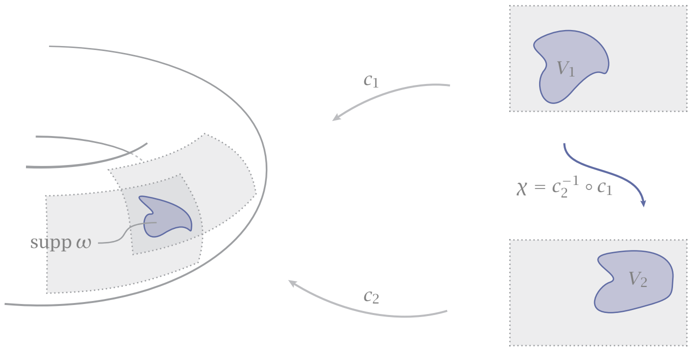
$$\chi^*(f \, \mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n) = (f \circ \chi)(\det D\chi) \mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Da der Koordinatenwechsel χ die Orientierung erhält, gilt

$$\det D\chi = |\det D\chi| > 0.$$

23.15

Abb 13 Träger von ω in zwei Kartengebieten



Mit der Transformationsformel 21.13 und $\chi(V_1) = V_2$ folgt daher weiter

$$\begin{aligned}\int_{V_1} \chi^* c_2^* \omega &= \int_{V_1} \chi^*(f \, \mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n) \\ &= \int_{V_1} (f \circ \chi) \, |\det D\chi| \, \mathrm{d}\lambda_n \\ &= \int_{V_2} f \, \mathrm{d}\lambda_n \\ &= \int_{\mathbb{I}^n} c_2^* \omega \\ &= \int_{c_2} \omega .\end{aligned}$$

▪ Der allgemeine Fall

Im Allgemeinen wird $\operatorname{supp} \omega$ allerdings nicht in einem einzigen Koordinatensystem enthalten sein – sonst wäre der ganze Aufwand mit den Mannigfaltigkeiten ja auch nicht nötig. Diesen Fall behandeln wir mithilfe einer Zerlegung der Eins. Dabei betrachten wir nur solche Zerlegungen $\mathcal{T}$, wo der Träger jeder Zerlegungsfunktion $\tau \in \mathcal{T}$ ganz im Bild eines n-Würfels enthalten ist. Dies lässt sich immer erreichen, indem man die Zerlegung der Eins einer Überdeckung von M durch Kartengebiete unterordnet.

Definition und Satz *Sei $\mathcal{T}$ eine Zerlegung der Eins auf M so, dass für jedes τ ein n-Würfel $c\colon \mathbb{I}^n \to M$ existiert mit*

$$\operatorname{supp} \tau \subset c(\mathbb{I}^n).$$

23.16

Für eine n-Form ω auf M sei dann

$$\int_M \omega \coloneqq \sum_{\tau\in\mathcal{T}} \int_M \tau\omega,$$

falls diese Reihe konvergiert. Dieses Integral ist unabhängig von $\mathcal{T}$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $\mathcal{S}$ eine zweite Zerlegung der Eins auf M mit der geforderten Träger-Eigenschaft. Da der Träger jeder Zerlegungsfunktion kompakt und jede Zerlegung lokal endlich ist, sind für jedes $\tau \in \mathcal{T}$ und jedes $\sigma \in \mathcal{S}$ auch die Mengen

$$\mathcal{S}_\tau = \{\sigma \in \mathcal{S} : \sigma\tau \not\equiv 0\}, \qquad \mathcal{T}_\sigma = \{\tau \in \mathcal{T} : \tau\sigma \not\equiv 0\}$$

endlich ??. Daher gilt

$$\tau = \tau \sum_{\sigma\in\mathcal{S}} \sigma = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_\tau} \tau\sigma, \qquad \sigma = \sigma \sum_{\tau\in\mathcal{T}_\sigma} \tau = \sum_{\tau\in\mathcal{T}_\sigma} \sigma\tau,$$

wobei jede Summe endlich ist. Folglich gilt auch

$$\begin{aligned} \sum_{\tau\in\mathcal{T}} \int_M \tau\omega &= \sum_{\tau\in\mathcal{T}} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_\tau} \int_M \tau\sigma\omega \\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}} \sum_{\tau\in\mathcal{T}_\sigma} \int_M \sigma\tau\omega = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}} \int_M \sigma\omega. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

Genau dieselben Definitionen gelten auch für Mannigfaltigkeiten mit Rand. Dabei ergeben sich keine neuen Schwierigkeiten. Wir sind daher jetzt in der Lage, den Satz von Stokes auf Mannigfaltigkeiten zu formulieren und zu beweisen.

5 **Allgemeiner Satz von Stokes** *Sei M eine kompakte, orientierte, n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Für eine $n-1$-Form ω auf M gilt dann*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

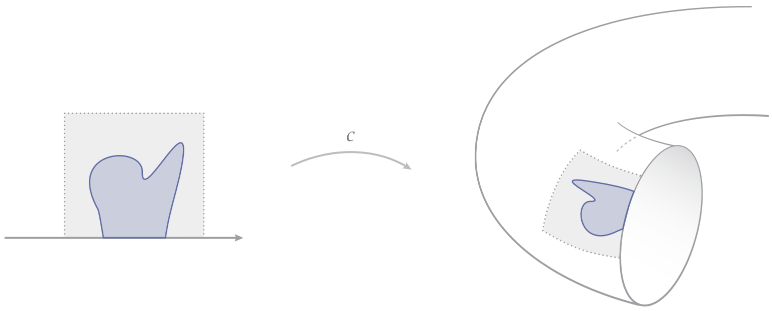
wobei ∂M mit der von M induzierten Orientierung versehen ist. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Der Beweis erfolgt in drei Schritten – zwei Spezialfälle innerhalb eines Koordinatensystems und der allgemeine Fall mit einer Zerlegung der Eins.

1. Fall Es gebe einen orientierungserhaltenden n-Würfel c in $M \setminus \partial M$ mit $\operatorname{supp}\omega \subset c(\mathbb{I}^n)$. Aufgrund der Rechenregeln für die äußere Ableitung 22.8 und des Fundamentalsatzes im $\mathbb{R}^n$ 22.10 gilt dann

$$\int_c \mathrm{d}\omega = \int_{\mathbb{I}^n} c^*(\mathrm{d}\omega) = \int_{\mathbb{I}^n} \mathrm{d}(c^*\omega) = \int_{\partial\mathbb{I}^n} c^*\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Abb 14 Träger von ω am Rand



Da nach Annahme $\omega = 0$ auf ∂c, gilt also

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_c \mathrm{d}\omega = \int_{\partial c} \omega = 0.$$

Wegen $\operatorname{supp}\omega \subset M \smallsetminus \partial M$ gilt andererseits auch

$$\int_{\partial M} \omega = 0.$$

Also sind beide Integrale gleich, nämlich Null, und die Behauptung ist in diesem Fall bewiesen.

2. Fall Es gebe einen orientierungserhaltenden n-Würfel c in M mit $\operatorname{supp}\omega \subset c(\mathbb{I}^n)$, wobei c genau eine Seite mit ∂M gemeinsam hat. In einem in einer Umgebung von $\mathbb{I}^n$ definierten Koordinatensystem von ∂M sei dies die $(n, 0)$-Seite. Wir nehmen also an, dass

$$c_{n,0} \subset \partial M,$$

während alle übrigen Seiten keine inneren Punkt mit ∂M gemeinsam haben.

Da c die Orientierung von M erhält, ist

$$\varrho_M = [\partial_1 c, .., \partial_n c].$$

Die $(n, 0)$-Seite von c ist

$$\check{c} := c \circ I^n_{n,0} = c|_{x_n=0}.$$

Somit ist $\partial_k \check{c} = \partial_k c$ für $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Außerdem weist die äußere Normale von M im Bereich dieses Würfels in die Richtung von $-\partial_n c$, da die Punkte mit $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ *innerhalb* von M liegen. Also gilt für die Orientierung des Randes

23.18

$$\begin{aligned}\varrho_{\partial M} &= [n, \partial_1 \check{c}, .., \partial_{n-1}\check{c}] \\ &= -[\partial_n c, \partial_1 c, .., \partial_{n-1} c] \\ &= -(-1)^{n-1}[\partial_1 c, .., \partial_n c] \\ &= (-1)^n \varrho_M.\end{aligned}$$

Aus den Annahmen folgt, dass $\check{c}$ die einzige Seite von c ist, auf der ω nicht verschwindet. Ferner ist $\check{c}$ ein $n-1$-Würfel in ∂M, der den Träger von ω innerhalb von ∂M enthält. Da im Fundamentalsatz im $\mathbb{R}^n$ 22.10 die $(n,0)$-Seite von c mit dem Faktor $(-1)^n$ eingeht, folgt hieraus

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_c \mathrm{d}\omega = (-1)^n \int_{\partial c} \omega = \int_{c_{n,0}} \omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Also ist die Behauptung auch in diesem Fall bewiesen.

3. Fall Betrachte nun den allgemeinen Fall. Wähle dazu eine Zerlegung der Eins $\mathfrak{T}$ auf M so, dass für jedes $\tau \in \mathfrak{T}$ auf $\tau\omega$ der erste oder zweite Fall zutrifft. Da M kompakt ist, kann diese Zerlegung sogar endlich gewählt werden ??. Für die konstante Funktion 1 gilt dann

$$0 = \mathrm{d}(1) = \mathrm{d}\sum_{\tau \in \mathfrak{T}} \tau = \sum_{\tau \in \mathfrak{T}} \mathrm{d}\tau,$$

wobei die Summe endlich ist. Also gilt auch

$$\sum_{\tau \in \mathfrak{T}} \mathrm{d}\tau \wedge \omega = 0.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_M \mathrm{d}\omega &= \sum_{\tau \in \mathfrak{T}} \int_M \tau\, \mathrm{d}\omega \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{T}} \int_M (\mathrm{d}\tau \wedge \omega + \tau\, \mathrm{d}\omega) \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{T}} \int_M \mathrm{d}(\tau\omega) \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{T}} \int_{\partial M} \tau\omega \\ &= \int_{\partial M} \omega.\end{aligned}$$

That's it. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Der Satz von Stokes ist falsch für *nicht kompakte* Mannigfaltigkeit mit Rand. Denn in diesem Fall ist auch $M \setminus \partial M$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand, nur ist der Rand hier die leere Menge. Es ist also in jedem Fall

$$\int_{\partial M} \omega = 0.$$

23.19

Es gibt aber $n-1$-Formen ω auf M mit

$$\int_M \mathrm{d}\omega \neq 0.$$

Auf nicht kompakten Mannigfaltigkeit gilt der Satz vielmehr mit der zusätzlichen Annahme, dass $\operatorname{supp}\omega$ kompakt ist. Der Beweis bleibt derselbe. ⊸

▪ Die Sätze von Gauss und Stokes

Für zwei- und dreidimensionale Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^3$ ergibt der Satz von Stokes die klassischen Integralsätze der Vektoranalysis. Dafür definieren wir das *vektorielle Linienelement*

$$\mathrm{d}\vec{s} \coloneqq (\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3)^\top$$

und das *vektorielle Flächenelement*

$$\mathrm{d}\vec{A} \coloneqq (\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3, \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2)^\top.$$

Das *Volumenelement* ist nach wie vor $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$.

Außerdem erinnern wir an die Definition des Nablaoperators. Sind die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und das Vektorfeld $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar, so heißen

$$\begin{aligned}
\nabla f &\coloneqq \operatorname{grad} f \coloneqq (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f)^\top,\\
\nabla \bullet F &\coloneqq \operatorname{div} F \coloneqq \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3,\\
\nabla \times F &\coloneqq \operatorname{rot} F \coloneqq (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)^\top
\end{aligned}$$

der *Gradient* von f sowie die *Divergenz* und *Rotation* von F.

Lemma *Für differenzierbares $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gilt*

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \operatorname{grad} f \bullet \mathrm{d}\vec{s},\\
\mathrm{d}(F \bullet \mathrm{d}\vec{s}) &= \operatorname{rot} F \bullet \mathrm{d}\vec{A},\\
\mathrm{d}(F \bullet \mathrm{d}\vec{A}) &= \operatorname{div} F\, \mathrm{d}V.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt immer

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla f &= \operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0,\\
\nabla \bullet (\nabla \times F) &= \operatorname{div}\operatorname{rot} F = 0.
\end{aligned}$$ ⋊

⟪⟪ Die erste Identität ist offensichtlich. Die zweite ergibt sich mit

23.20

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(F_1\,\mathrm{d}x_1 + F_2\,\mathrm{d}x_2 + F_3\,\mathrm{d}x_3) \\
&\quad = \partial_2 F_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 + \partial_3 F_1\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \\
&\qquad + \partial_1 F_2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \partial_3 F_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2 \\
&\qquad + \partial_1 F_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \partial_2 F_3\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\
&\quad = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2)\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + (\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3)\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \\
&\qquad + (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 .
\end{aligned}$$

Und die dritte folgt mit

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(F_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + F_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + F_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2) \\
&\quad = \partial_1 F_1\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \textit{zyklische Vertauschungen} \\
&\quad = (\partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 .
\end{aligned}$$

Mit diesen Identitäten und $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$ folgt schließlich

$$\begin{aligned}
0 &= \mathrm{d}^2 f &&= \mathrm{d}(\operatorname{grad} f \bullet \mathrm{d}\vec{s}) &&= \operatorname{rot}\operatorname{grad} f \bullet \mathrm{d}\vec{A}, \\
0 &= \mathrm{d}^2(F \bullet \mathrm{d}\vec{s}) &&= \mathrm{d}(\operatorname{rot} F \bullet \mathrm{d}\vec{A}) &&= \operatorname{div}\operatorname{rot} F \bullet \mathrm{d}V .
\end{aligned}$$ ⟫⟫⟫

Damit erhalten wir die folgenden Sätze der Vektoranalysis. Der Satz von Gauss wird auch *Divergenzsatz* genannt.

6 **Satz von Gauss** *Sei M^3 eine kompakte orientierte 3-Mannigfaltigkeit mit Rand. Ist das Vektorfeld F in einer Umgebung von M^3 differenzierbar, so gilt*

$$\int_{\partial M^3} F \bullet \mathrm{d}\vec{A} = \int_{M^3} \mathrm{d}(F \bullet \mathrm{d}\vec{A}) = \int_{M^3} \operatorname{div} F\,\mathrm{d}V .$$ ⋊

7 **Satz von Stokes** *Sei M^2 eine kompakte orientierte 2-Mannigfaltigkeit mit Rand. Ist das Vektorfeld F in einer Umgebung von M^2 differenzierbar, so gilt*

$$\int_{\partial M^2} F \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \int_{M^2} \mathrm{d}(F \bullet \mathrm{d}\vec{s}) = \int_{M^2} \operatorname{rot} F \bullet \mathrm{d}\vec{A} .$$ ⋊

Der Fundamentalsatz für Wegintegrale gehört ebenfalls dazu.

Satz von Fund *Sei M^1 eine kompakte orientierte 1-Mannigfaltigkeit mit Rand. Ist die Funktion f in einer Umgebung von M^1 differenzierbar, so gilt*

$$\int_{\partial M^1} f = \int_{M^1} \mathrm{d}f = \int_{M^1} \operatorname{grad} f \bullet \mathrm{d}\vec{s} .$$ ⋊