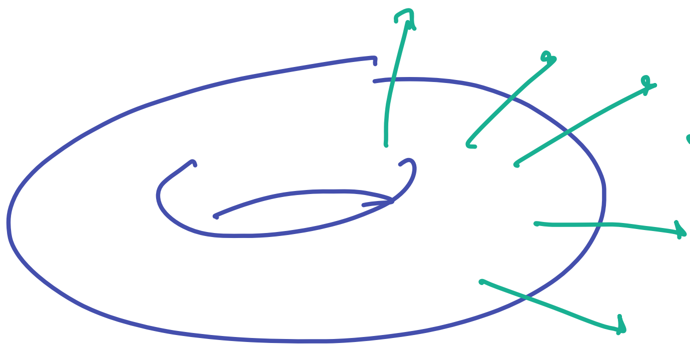
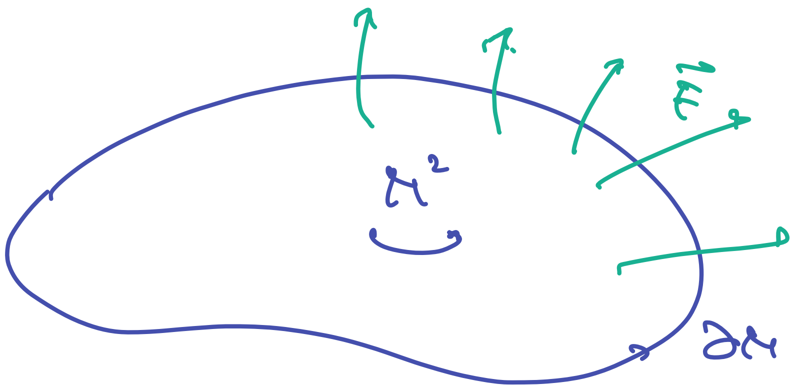
23. Vorlesung $\qquad\qquad$ 20. 1. 2022

$M^3 \subset \mathbb{R}^3$



$$\vec F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\partial M^3} \underbrace{\vec F \cdot d\vec A}_{2\text{-Form}} \underset{\text{Stokes}}{=} \int_{M^3} \underbrace{d(\vec F \cdot d\vec A)}_{\operatorname{div} \vec F \cdot dV}.$$



$F_1\,dx_1 + \dots + F_3\,dx_3$

$$\int_{\partial M^2} \underbrace{\vec{F}\cdot d\vec{s}}_{1\text{-Form}} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{M^2} d(\vec{F}\cdot d\vec{s})$$

$$= \int_{M^2} \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{A}$$

Beweis: Sei $v_1,\dots,v_n$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis, so gibt es genau eine n-Form ω mit

$$\omega(v_1,\dots,v_n) = 1.$$

Also $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ hat Dimension 1.

Sei $w_1,\dots,w_n$ eine weitere, positiv orientierte Orthonormalbasis, so ist die Basiswechsel

$$T : \quad Tv_\mu = w_\mu, \quad 1 \le \mu \le n$$

orientierungserhaltend und orthogonal. Also

$$\det T = 1.$$

Also:

$$\begin{aligned}
\omega(w_1,\dots,w_n) &= \omega(T_* v_1,\dots,T_* v_n) \\
&= T^*\omega(v_1,\dots,v_n) \\
&= \underbrace{(\det T)}_{=1}\,\omega(v_1,\dots,v_n) \\
&= \omega(v_1,\dots,v_n) = 1.
\end{aligned}$$

M orientierte n-Mgf:

$$T_pM \cong \mathbb{R}^n$$

so ex. eindeutige Volumenform in T_pM:

$$\omega(p)$$

die differenzierbar in p.

Bsp: Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

ist auch orient. n-Mgf:

$$dV = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

und

$$|M| = \int_M dV = \int_\Omega 1 .$$

Proof: (ii)

$T_pM \ni u, v$ positive orient.

Data orthonormal basis

ω_1, ω_2 :

$u = \lambda \omega_1$, $\lambda > 0$

$v = \mu \omega_2 + \nu \omega_1$,

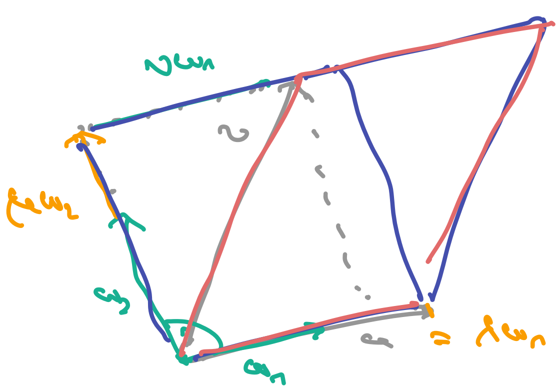
Then $\mu > 0$, and

$$dA(u,v) = dA(\lambda\omega_1, \mu\omega_2 + \nu\omega_1)$$

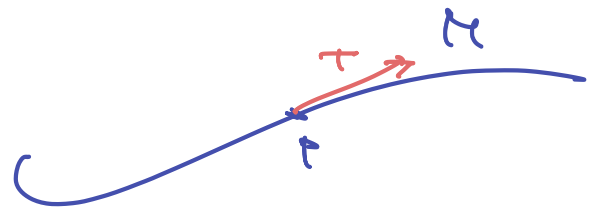
$$= dA(\lambda\omega_1, \mu\omega_2)$$

$$= \lambda\mu \cdot \underbrace{dA(\omega_1, \omega_2)}_{=1}$$

$$= \lambda\mu .$$



Beweis:



Sei o.E. $v \in T_pM$ positiv orientiert, dann

$$T = \frac{v}{\|v\|}$$

und

$$ds(v) \overset{\text{s.o.}}{=} \|v\| = \langle T, v \rangle$$

$$= T_1 v_1 + \dots + T_n v_n$$

$$= (T_1\, dx_1 + \dots + T_n\, dx_n)(v)$$

$$dx_j(v) = v_j$$

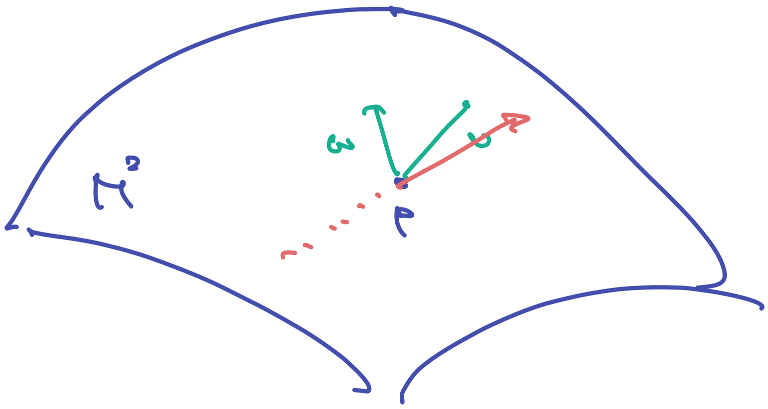
Zweite Identität:

Auf $T_pM = \operatorname{span}(T)$,

gilt $ds(T) = \|T\| = 1$:

$$T_i \underbrace{ds(T)}_{1} = T_i = dx_i(T)$$

Also auf ganz T_pM: $T_i\, ds = dx_i$. ∎



Dann $v \times w \perp T_p M$!

Dann sei u ein [illegible] Normale [illegible] an p

$$\underbrace{[u, v, w]}_{\text{[illegible]}} = [e_1, e_2, e_3]$$

Dreibein!

Beweis. Seien $v, w \in T_pM$ positiv orientiert:

$$dA(v,w) = \| v \times w \|$$

Für n gilt:

$$n = \frac{v \times w}{\| v \times w \|}$$

Also:

$$v \times w = n \cdot \| v \times w \|$$

Also:

$$dA(v,w) = \| v \times w \|$$

$$= \langle n, v \times w \rangle$$

$$= \begin{vmatrix} n_1 & v_1 & w_1 \\ n_2 & v_2 & w_2 \\ n_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$= n_1 \cdot \underbrace{(v_2 w_3 - v_3 w_2)}_{} + \dots$$

$$= \Big(n_1 \cdot \underbrace{dx_2 \wedge dx_3}_{} + \text{zyk. Vertauschung} \Big)(v,w)$$

Das ist genau die Behauptung.

Für $u \in \mathbb{R}^3$:

$$\langle u, v \times w\rangle$$

$$= \underbrace{\langle u, n\rangle}\ (|v \times w|)$$

$$= \langle u, n\rangle\ dA(v,w)$$

$u = e_1$: ...

$$n_1\, dA(v,w)$$

$$= (dx_2 \wedge dx_3)(v,w)$$

Gilt für $v, w \in T_pM$. Als Abbildungen auf T_pM:

$$n_1\, dA = dx_2 \wedge dx_3$$

$$+ \text{zykl. Vertauschungen.} \quad \square$$

Bem.: Auf Tangentialen an Kurve ist

$$T_\nu \, ds = dx_\nu .$$

Daher:

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = F_1 \, dx_1 + F_2 \, dx_2 + F_3 \, dx_3$$

$$= F_1 T_1 \, ds + \dots + F_3 T_3 \, ds$$

$$= (F \cdot T) \, ds$$

$$= \langle F, T \rangle \, ds$$

Auf Tangentialen an Fläche:

$$dx_2 \wedge dx_3 = n_1 \, dA \quad \dots$$

Daher:

$$\vec{F} \cdot d\vec{A} = F_1 n_1 \, dA + F_2 n_2 \, dA + \dots$$

$$= \langle F, n \rangle \, dA .$$

Geometry:

$$\langle F, n \rangle \, dA = F \cdot d\vec{A}$$

Pf:

$$\int_{\partial M^3} \langle F, n \rangle \, dA = \int_{\partial M^3} F \cdot d\vec{A}$$

$$= \int_{M^3} d(\quad)$$

$$= \int_{M^3} \operatorname{div} F \cdot dV$$

$$= \int_{M^3} (\nabla \cdot F) \, dV.$$

Geometry:

$$\langle F, T \rangle \, ds = F \cdot d\vec{s}$$

also

$$\int_{\partial M^2} \langle F, T \rangle \, ds = \int_{\partial M^2} F \cdot d\vec{s}$$

$$= \int_{M^2} \underbrace{d(\quad)}_{\operatorname{rot} F \cdot d\vec{A}}$$

$$= \langle \nabla \times F, n \rangle \, dA.$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot \nabla f$$

$$= f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

$$= \Delta f$$

Δ Laplace operator:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\langle \nabla f, n \rangle \qquad \text{Richtungsableitung von } f \text{ in Richtung } n$$

$$=: \frac{\partial f}{\partial n}$$

Damit

$$\int_{M^3} \Delta f \, dV = \int_{\partial M^3} \frac{\partial f}{\partial n} \, dA$$

Setze für $F = g \nabla f$:

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot (g \nabla f)$$

$$= \nabla g \cdot \nabla f + g \Delta f$$

Ergebnis :

$$\int_{M^3} \left(\nabla g \cdot \nabla f + g \Delta f \right) dV$$

$$= \int_{\partial M^3} \langle g \nabla f, n \rangle \, dA$$

$$= \int_{\partial M^3} g \cdot \frac{\partial f}{\partial n} \, dA .$$

Vertausche g und f, Differenz:

$$\int_{B^3} \left(f \Delta g - g \Delta f \right) dV = \int_{\partial B^3} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dA$$