23.4 Das Volumenelement

Um die Integralsätze in der klassischen Form zu notieren, benötigen wir noch das skalare Linien-, Flächen- und Volumenelement. Zunächst der Standardraum.

Lemma *Im euklidischen n-Raum gibt es genau eine alternierende n-Form ω, das Volumenelement, so dass*

$$\omega(v_1,..,v_n) = 1$$

für jede positiv orientierte Orthonormalbasis $v_1,..,v_n$. ⋊

⟪ Ist $v_1,..,v_n$ irgendeine positiv orientierte Orthonormalbasis, so gibt es genau eine n-Form ω mit $\omega(v_1,..,v_n) = 1$, denn $\Lambda^n\mathbb{R}^n$ ist eindimensional. Ist $w_1,..,w_n$ eine weitere positiv orientierte Orthonormalbasis, so ist der Basiswechsel T mit $Tv_\mu = w_\mu$ für $1 \leqslant \mu \leqslant n$ eine orientierungserhaltende, *orthogonale* Transformation. Also ist

$$\det T = 1,$$

und deshalb 22.4

$$\begin{aligned} \omega(w_1,..,w_n) &= \omega(T_*v_1,..,T_*v_n) \\ &= T^*\omega(v_1,..,v_n) \\ &= (\det T)\,\omega(v_1,..,v_n) = 1. \end{aligned}$$

Also gibt es nur eine solche Form ω. ⟫

Ist M eine orientierte n-Mannigfaltigkeit, so ist jeder Tangentialraum ein orientierter n-dimensionaler Untervektorraum des Umgebungsraumes. Somit existiert in jedem Punkt p ein eindeutiges Volumenelement $\omega(p)$. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass dies eine *differenzierbare* n-Form auf M definiert.

Definition *Die auf diese Weise auf einer orientierten Mannigfaltigkeit M definierte n-Form heißt das Volumenelement auf M und wird mit $\mathrm{d}V$ bezeichnet. Die reelle Zahl*

$$|M| \coloneqq \int_M \mathrm{d}V$$

heißt das Volumen von M. ⋊

Bemerkung Die Bezeichnung $\mathrm{d}V$ bedeutet *nicht*, dass es sich um das Differenzial einer Funktion handelt. Es ist nur eine historisch bedingte Schreibweise. ⊸

▷ Auf einer n-Mannigfaltigkeit M im $\mathbb{R}^n$, also einem Gebiet im $\mathbb{R}^n$, ist

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n$$

und

$$|M| = \int_M \mathrm{d}V = \int_M 1$$

das klassische Volumen von M, wenn dieses Integral existiert. ◂

Im eindimensionalen Fall spricht man natürlich vom *Längen-* oder *Linienelement* $\mathrm{d}s$, im zweidimensionalen Fall vom *Flächenelement* $\mathrm{d}A$, und reserviert $\mathrm{d}V$ für das dreidimensionale Volumenelement. Diese haben eine einfache geometrische Interpretation, wenn wir vom Standardskalarprodukt ausgehen.

8 **Lemma** *Sind u, v, w positiv orientierte Tangentialvektoren an eine orientierte 1-, 2- respektive 3-Mannigfaltigkeit, so ist*

(i) $\mathrm{d}s(u)$ *die Länge des Vektors* u,

(ii) $\mathrm{d}A(u, v)$ *der Flächeninhalt des Parallelogramms mit Seiten* u, v,

(iii) $\mathrm{d}V(u, v, w)$ *das Volumen des Spates mit Seiten* u, v, w. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir zeigen (ii). Wir wählen in T_pM eine Orthonormalbasis w_1, w_2 so, dass $u = \lambda w_1$ mit $\lambda > 0$ und $v = \mu w_2 + v w_1$. Dann ist $\mu > 0$, da u und v positiv orientiert sind, und

$$\mathrm{d}V(u, v) = \mathrm{d}V(\lambda w_1, \mu w_2) = \lambda\mu\, \mathrm{d}V(w_1, w_2) = \lambda\mu.$$

Dies ist gerade der Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Seiten u und v. ⟩⟩⟩⟩⟩

Wir beschreiben das Linien- und das Flächenelement noch etwas genauer.

9 **Satz** *Sei M eine orientierte 1-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$. Mit dem Tangenteneinheitsvektor T an M gilt dann*

$$\mathrm{d}s = T_1\, \mathrm{d}x_1 + \,..\, + T_n\, \mathrm{d}x_n$$

sowie auf TM

$$T_\nu\, \mathrm{d}s = \mathrm{d}x_\nu, \qquad 1 \leqslant \nu \leqslant n. \qquad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist $v \in T_pM$ positiv orientiert, so ist $T = v/\|v\|$ und 8

$$\mathrm{d}s(v) = \|v\| = \langle T, v\rangle = (T_1\, \mathrm{d}x_1 + \,..\, + T_n\, \mathrm{d}x_n)(v).$$

Dies ergibt die erste Identität. Die zweite Identität muss nur für den Vektor T verifiziert werden, da er in jedem Punkt den Tangentialraum aufspannt. Mit $\mathrm{d}s(T) = 1$ ergibt sich dies aus

$$T_\nu\, \mathrm{d}s(T) = T_\nu = \mathrm{d}x_\nu(T). \qquad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

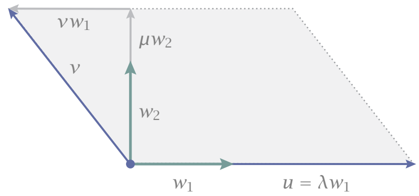

Abb 15

Zum Flächenelement

Das Flächenelement

Sei M eine orientierte 2-Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^3$. Auch wenn diese nicht als Rand einer 3-Mannigfaltigkeit auftreten, können wir ihnen ihr eindeutige ›äußere‹ Normale wie folgt zuordnen.

Seien $v, w \in T_pM$ positiv orientiert. Dann steht der Vektor $v \times w$ senkrecht auf T_pM, und n sei derjenige Einheitsvektor in dieser Richtung mit

$$[n, v, w] = [e_1, e_2, e_3].$$

In diesem Fall bilden n, v, w ein *rechtshändiges Dreibein:* die Vektoren n, v, w weisen, in dieser Reihenfolge, in dieselben Richtungen wie die ausgestreckten Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand. Es ist nicht schwer zu verifizieren, dass diese ›äußere‹ Normale wohldefiniert ist und differenzierbar vom Punkt p abhängt $_{\text{A-2}}$.

Bemerkung Es gilt auch die Umkehrung. Können wir auf einer Hyperfläche M im $\mathbb{R}^3$ eine differenzierbare Normalenfunktion $n\colon M \to \mathbb{S}^2$ erklären, so ist M orientierbar $_{\text{A-3}}$. Die Nichtorientierbarkeit des Möbiusbandes ist daher gleichbedeutend mit der Unmöglichkeit, dort eine stetige Normalenfunktion zu definieren — denn beide Seiten des Bandes gehören zur selben Fläche. ⊸

10 **Satz** *Sei M eine orientierte 2-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$. Mit der nach außen gerichteten Einheitsnormalen n an M gilt*

$$\mathrm{d}A = n_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + n_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + n_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2.$$

Ferner gelten auf TM die Identitäten

$$n_1\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3, \quad n_2\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1, \quad n_3\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2. \qquad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨ Sind $v, w \in T_pM$ positiv orientiert, so ist $_8$

$$\mathrm{d}A(v, w) = \|v \times w\|,$$

denn die Länge des Kreuzproduktvektors repräsentiert den Inhalt des von v, w aufgespannten Parallelogramms. Aufgrund der Definition von n gilt außerdem

$$v \times w = n\,\|v \times w\|.$$

Also ist

$$\mathrm{d}A(v,w) = \langle n, v\times w\rangle = \begin{vmatrix} n_1 & v_1 & w_1 \\ n_2 & v_2 & w_2 \\ n_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$= (n_1\,\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3 + n_2\,\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1 + n_3\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2)(v,w).$$

Dies ist die erste Identität. Außerdem folgt für einen Vektor $u\in\mathbb{R}^3$

$$\langle u, v\times w\rangle = \langle u,n\rangle\,\|v\times w\| = \langle u,n\rangle\,\mathrm{d}A(v,w).$$

Wählen wir für u die Basisvektoren e_1,e_2,e_3, so erhalten wir

$$(\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3)(v,w) = n_1\,\mathrm{d}A(v,w)$$

sowie die entsprechenden zyklischen Vertauschungen hiervon, also die zweiten Gleichungen. ⟫⟫⟫

Bemerkung Die zweiten Gleichungen in diesem Satz gelten nur auf TM, also bei Anwendung auf Tangentialvektoren an M. Im Gesamtraum $\mathbb{R}^3$ gelten sie im Allgemeinen *nicht*. Entsprechendes gilt auch für das Linienelement. ⊸

23.5 Die klassischen Sätze

Wir stellen die Sätze von Gauss und Stokes jetzt mit den skalaren Linien- und Flächenelementen dar. Die Verbindung zu den vektoriellen Elementen stellt das folgende Lemma her.

Lemma *Sei $F\colon\mathbb{R}^3\hookrightarrow\mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$F\bullet\mathrm{d}\vec{s} = \langle F,T\rangle\,\mathrm{d}s,\qquad F\bullet\mathrm{d}\vec{A} = \langle F,n\rangle\,\mathrm{d}A$$

auf einer Kurve mit positiv orientiertem Tangenteneinheitsvektor T respektive einer Fläche mit positiv orientierter Normalen n. ⋊

⟪⟪⟪ Auf dem Tangentialraum einer Kurve ist $_9$ $T_\nu\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}x_\nu$ und deshalb

$$F\bullet\mathrm{d}\vec{s} = F_1T_1\,\mathrm{d}s + F_2T_2\,\mathrm{d}s + F_3T_3\,\mathrm{d}s = \langle F,T\rangle\,\mathrm{d}s.$$

Auf dem Tangentialraum einer Fläche ist $_{10}$ $\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3 = n_1\,\mathrm{d}A$ etc und damit

$$F\bullet\mathrm{d}\vec{A} = F_1n_1\,\mathrm{d}A + F_2n_2\,\mathrm{d}A + F_3n_3\,\mathrm{d}A = \langle F,n\rangle\,\mathrm{d}A.$$ ⟫⟫⟫

Damit erhalten die Integralsätze die folgende Formulierung.

23.25

11 **Satz von Gauss** *Sei M^3 eine kompakte orientierte 3-Mannigfaltigkeit mit Rand. Ist das Vektorfeld F in einer Umgebung von M^3 differenzierbar, so gilt*

$$\int_{\partial M^3} \langle F, n \rangle \, \mathrm{d}A = \int_{M^3} \nabla \bullet F \, \mathrm{d}V,$$

wobei n die äußere Normale an M^3 bezeichnet. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Denn $\langle F, n \rangle \, \mathrm{d}A = F \bullet \mathrm{d}\vec{A}$ und

$$\mathrm{d}(F \bullet \mathrm{d}\vec{A}) = \operatorname{div} F \, \mathrm{d}V = \nabla \bullet F \, \mathrm{d}V.$$ ⟩⟩⟩⟩⟩

12 **Satz von Stokes** *Sei M^2 eine kompakte orientierte 2-Mannigfaltigkeit mit Rand. Ist das Vektorfeld F in einer Umgebung von M^2 differenzierbar, so gilt*

$$\int_{\partial M^2} \langle F, T \rangle \, \mathrm{d}s = \int_{M^2} \langle \nabla \times F, n \rangle \, \mathrm{d}A,$$

wobei n die äußere Normale an M^2 und T den Tangenteneinheitsvektor an ∂M^2 bezeichnet, die durch die Orientierung von M^2 bestimmt sind. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Denn $\langle F, T \rangle \, \mathrm{d}s = F \bullet \mathrm{d}\vec{s}$ und

$$\mathrm{d}(F \bullet \mathrm{d}\vec{s}) = \operatorname{rot} F \, \mathrm{d}\vec{A} = \langle \nabla \times F, n \rangle \, \mathrm{d}A.$$ ⟩⟩⟩⟩⟩

Die Formeln von Green

Ist das Vektorfeld F der Gradient einer Funktion f, so ist im Satz von Gauß das Volumenintegral über $\operatorname{div} \operatorname{grad} f$ zu bilden, was wegen

$$\nabla \bullet \nabla = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 =: \Delta$$

nichts anderes ist als die Anwendung des *Laplaceoperators* Δ auf f, also

$$\Delta f = \partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \partial_3^2 f.$$

Korollar *Ist die Funktion f in einer Umgebung von M^3 differenzierbar, so gilt*

$$\int_{M^3} \Delta f \, \mathrm{d}V = \int_{\partial M^3} \langle \nabla f, n \rangle \, \mathrm{d}A.$$ ⋊

Das Skalarprodukt im Oberflächenintegral ist die Richtungsableitung von f in Richtung der äußeren Normalen an M^3. Diese heißt die *Normalenableitung* von f und wird auch notiert als

$$\frac{\partial f}{\partial n} := \langle \nabla f, n \rangle.$$

Daher schreibt man die letzte Formel auch

$$\int_{M^3} \Delta f \,\mathrm{d}V = \int_{\partial M^3} \frac{\partial f}{\partial n} \,\mathrm{d}A.$$

Wenden wir den Satz von Gauss auf ein Vektorfeld $F = g\nabla f$ an, so wird mit der gewöhnlichen Produktregel

$$\operatorname{div} F = \nabla \bullet (g\nabla f) = \nabla g \bullet \nabla f + g\Delta f.$$

Das Ergebnis ist dann die *Greensche Formel*

$$\int_{M^3} (\nabla g \bullet \nabla f + g\Delta f) \,\mathrm{d}V = \int_{\partial M^3} g \,\langle \nabla f, n \rangle \,\mathrm{d}A.$$

Vertauschen wir g und f und bilden die Differenz, so fällt der Term $\nabla g \bullet \nabla f$ heraus, und wir erhalten folgendes Ergebnis.

13 **Greensche Formel** *Sei M^3 eine kompakte orientierte 3-Mannigfaltigkeit mit Rand. Sind f und g in einer Umgebung von M^3 differenzierbar, so gilt*

$$\begin{aligned}\int_{M^3} (f\Delta g - g\Delta f) \,\mathrm{d}V &= \int_{\partial M^3} \langle f\nabla g - g\nabla f, n \rangle \,\mathrm{d}A \\ &= \int_{\partial M^3} \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n} \right) \mathrm{d}A.\end{aligned}$$