

Daher schreibt man die letzte Formel auch

$$\int_{M^3} \Delta f \, dV = \int_{\partial M^3} \frac{\partial f}{\partial n} \, dA.$$

Wenden wir den Satz von Gauss auf ein Vektorfeld $F = g \nabla f$ an, so wird mit der gewöhnlichen Produktregel

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot (g \nabla f) = \nabla g \cdot \nabla f + g \Delta f.$$

Das Ergebnis ist dann die *Greensche Formel*

$$\int_{M^3} (\nabla g \cdot \nabla f + g \Delta f) \, dV = \int_{\partial M^3} g \langle \nabla f, n \rangle \, dA.$$

Vertauschen wir g und f und bilden die Differenz, so fällt der Term $\nabla g \cdot \nabla f$ heraus, und wir erhalten folgendes Ergebnis.

- 13 **Greensche Formel** Sei M^3 eine kompakte orientierte 3-Mannigfaltigkeit mit Rand. Sind f und g in einer Umgebung von M^3 differenzierbar, so gilt

$$\begin{aligned} \int_{M^3} (f \Delta g - g \Delta f) \, dV &= \int_{\partial M^3} \langle f \nabla g - g \nabla f, n \rangle \, dA \\ &= \int_{\partial M^3} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) \, dA. \end{aligned}$$

■ Koordinatendarstellung

Wir stellen das Flächenelement noch in lokalen Koordinaten dar. Wir erhalten damit die Flächenintegrale in klassischer Form.

Satz In einem orientierungstreuen Koordinatensystem $\varphi: (u, v) \mapsto \varphi(u, v)$ einer orientierten 2-Mannigfaltigkeit M^2 im \mathbb{R}^3 ist

$$n = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$$

und

$$\varphi^* dA = \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, du \wedge dv = \sqrt{EG - F^2} \, du \wedge dv$$

mit $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle$, $G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$, $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$. \times

««« Es ist $\varphi^* dA = f(u, v) \, du \wedge dv$ mit $\textcircled{8}$

$$f(u, v) = \varphi^* dA(e_1, e_2) = dA(\varphi_u, \varphi_v) = \|\varphi_u \times \varphi_v\|.$$

Die letzte Darstellung folgt hieraus mit $\|v \times w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2$. $\textcircled{8}$

Korollar Der Flächeninhalt einer Fläche M mit Koordinaten $\varphi: D \rightarrow M$ ist

$$|M| = \int_D \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, d\lambda,$$

und das Integral einer skalaren Funktion $\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ über M gegeben durch

$$\int_M \psi \, dA = \int_D \psi(\varphi(u, v)) \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, d\lambda. \quad \times$$

► **Funktionsgraph** Der Graph einer differenzierbaren Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^3 und wird beschrieben durch ein einziges Koordinatensystem

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))^T.$$

Also ist

$$\varphi_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{pmatrix}, \quad \varphi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{pmatrix}, \quad \varphi_u \times \varphi_v = \begin{pmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{pmatrix},$$

und damit

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\|^2 = 1 + f_u^2 + f_v^2.$$

Der Flächeninhalt des Graphen Γ von f über einem Gebiet D ist demnach

$$|\Gamma| = \int_D dA = \int_D \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} \, d\lambda.$$

Entsprechendes gilt für das Integral einer skalaren Funktion ψ über Γ . ◀

► **Rotationsfläche** Sei $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ differenzierbar. Durch Rotation des Graphen von f um die x -Achse entsteht eine Rotationsfläche R , die durch

$$\varphi: [a, b] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (t, \theta) \mapsto (t, f(t) \cos \theta, f(t) \sin \theta)^T$$

parametrisiert wird. Es ist

$$\varphi_t = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \cos \theta \\ f'(t) \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \varphi_\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(t) \sin \theta \\ f(t) \cos \theta \end{pmatrix},$$

und damit

$$E = \|\varphi_t\|^2 = 1 + (f')^2, \quad G = \|\varphi_\theta\|^2 = f^2, \quad F = \langle \varphi_t, \varphi_\theta \rangle = 0.$$

Wegen $f \geq 0$ ist also

$$\varphi^* dA = f \sqrt{1 + (f')^2} \, dt \wedge d\theta.$$

Der Flächeninhalt der Rotationsfläche ist demnach

$$|R| = \int_R dA = 2\pi \int_a^b f(t) \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

Typischerweise sind solche Integrale nicht mehr elementar auswertbar. ◀

Zum Vergleich notieren wir noch das entsprechende Ergebnis für Kurven.

Satz In einem Koordinatensystem φ einer orientierten 1-Mannigfaltigkeit M ist

$$T = \frac{\dot{\varphi}}{\|\dot{\varphi}\|}, \quad \varphi^* ds = \|\dot{\varphi}(t)\| dt.$$

Die Länge der Mannigfaltigkeit M mit Koordinaten $\varphi: I \rightarrow M$ ist demnach

$$|M| = \int_M ds = \int_I \|\dot{\varphi}(t)\| dt,$$

und das Integral einer skalaren Funktion ψ entlang M ist

$$\int_M \psi ds = \int_I \psi(\varphi(t)) \|\dot{\varphi}(t)\| dt. \quad \times$$

Bemerkungen a. Die Länge L einer stetigen Kurve $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ hatten wir als das Supremum der Längen aller einbeschriebenen Polygonzüge definiert, falls dieses Supremum endlich ist. Ist die Kurve stetig differenzierbar, so ist diese Länge durch das Integral über ds gegeben.

b. Für Flächen gilt dies nicht mehr! Man kann den Inhalt einer Fläche nicht mehr dadurch definieren, das man diese durch hinreichend kleine Polygone approximiert und das Supremum über deren Flächensumme bildet. Dieses Supremum kann unendlich sein, auch wenn das Integral über das Flächenelement endlich ist A-13. \rightarrow

■ Physikalischer Hintergrund

Die Begriffe Divergenz und Rotation sowie die klassischen Sätze der Vektoranalysis haben ihren Ursprung in der Strömungslehre.

Das Vektorfeld $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ beschreibe die *stationäre* Strömung einer Flüssigkeit. Das heißt, die Strömungslinien ändern sich *nicht* im Laufe der Zeit. Die Aufgabe ist, die Strömungsbilanz bezüglich eines fiktiven Volumens K innerhalb der Strömung zu bestimmen.

In einem beliebigen Koordinatensystem der Oberfläche von K ist das infinitesimale Strömungsvolumen gegeben durch das Volumen desjenigen Spates, das durch den Strömungsvektor F und den zwei Tangentialvektoren v und w des Koordinatensystems aufgespannt wird. Dieses Volumen ist gegeben durch

$$F \cdot (v \times w) = F \cdot d\vec{A}(v, w).$$

Der Beitrag einer nach außen gerichteten Strömung wird hierbei positiv gewertet, einer nach innen gerichteten Strömung negativ. Die gesamte Bilanz ist das Integral dieser Größe über den Rand ∂K des Volumens. Gemäß dem Satz von Gauss gilt hierfür

$$\int_{\partial K} F \cdot d\vec{A} = \int_K \operatorname{div} F \, dV.$$

Dies gilt für jedes fiktive Volumen K innerhalb der Strömung.

Betrachten wir nun Kugeln $B_r(x)$ um einen festen Punkt x mit immer kleineren Radien, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} F)(x) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} \operatorname{div} F \, dV \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} F \cdot d\vec{A}. \end{aligned}$$

Somit beschreibt $\operatorname{div} F$ in jedem Punkt die *infinitesimale Strömungsbilanz* oder *Quelldichte* des Vektorfeldes F . Verschwindet die Divergenz überall, so heißt die Strömung *inkompressibel*.

- 14 **Notiz** Ein auf einem sternförmigen Gebiet inkompressibles Vektorfeld F besitzt ein *Vektorpotential* V . Das heißt, es gilt

$$F = \operatorname{rot} V. \quad \times$$

«»» Mit $\operatorname{div} F = 0$ ist $d(F \cdot d\vec{A}) = 0$. Aufgrund des Lemmas von Poincaré 22.9 ist also $F \cdot d\vec{A}$ exakt, also

$$F \cdot d\vec{A} = d(V \cdot d\vec{s}) = \operatorname{rot} V \cdot d\vec{A}$$

mit einem gewissen Vektorfeld V . Also ist $F = \operatorname{rot} V$. »»»

Betrachte nun eine fiktive Membran M mit Rand ∂M innerhalb der Strömung. Das Integral

$$\int_{\partial M} F \cdot d\vec{s} = \int_{\partial M} \langle F, T \rangle \, ds$$

können wir als Bilanz des Winkels des Strömungsvektors F mit der Tangentenrichtung T über den gesamten Rand ∂M interpretieren. Es stellt somit ein Maß der Zirkulation des Vektorfeldes entlang ∂M dar. Mit dem Satz von Stokes gilt nun

$$\int_{\partial M} F \cdot d\vec{s} = \int_M \operatorname{rot} F \cdot d\vec{A}.$$

Somit können wir $\operatorname{rot} F$ interpretieren als das Maß für die infinitesimale Verwirbelung eines Vektorfeldes. Verschwindet die Rotation überall, so heißt die Strömung *wirbelfrei*.

Notiz Ein auf einem sternförmigen Gebiet wirbelfreies Vektorfeld F ist ein *Gradientenfeld*. Das heißt, es existiert eine Funktion f , so dass

$$F = \nabla f. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Mit $\operatorname{rot} F = 0$ ist auch $\operatorname{rot} F \cdot d\vec{A} = 0$ und damit $d(F \cdot d\vec{s}) = 0$. Also ist mit dem einfachen Lemma von Poincaré^{19,12}

$$F \cdot d\vec{s} = df = \nabla f \cdot d\vec{s}$$

mit einer skalaren Funktion f . Also ist $F = \nabla f$. ⟩⟩⟩

23.6 Zwei Anwendungen

Als erste Anwendung zeigen wir die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen im \mathbb{R}^3 .

Satz Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und harmonisch. Dann gilt

$$f(p) = \frac{1}{|\partial B_r(p)|} \int_{\partial B_r(p)} f \, dA$$

für jede Kugel $B_r(p)$, die im Definitionsbereich von f enthalten ist. \times

⟨⟨⟨ Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $p = 0$. Definiere φ_t durch

$$\varphi_t(x) := f(tx)$$

für alle $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}^3$, für die tx im Definitionsbereich von f liegt. Betrachte

$$I_t = \int_{\partial B_r(0)} \varphi_t \, dA.$$

Dann ist $\varphi_0 \equiv f(0)$ und $I_0 = |B_r(0)|$. Es genügt daher zu zeigen, dass I_t konstant in t ist. Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_t &= \int_{\partial B_r(0)} \frac{d}{dt} \varphi_t \, dA \\ &= \int_{\partial B_r(0)} \nabla f(tx) \cdot x \, dA = r \int_{\partial B_r(0)} \nabla f(tx) \cdot n \, dA, \end{aligned}$$

denn im Punkt $x \in \partial B_r(0)$ ist die äußere Normale $n = x/r$. Mit Gauss folgt

$$\frac{d}{dt} I_t = rt \int_{B_r(0)} \Delta f(tx) \, dV = 0,$$

da ja $\Delta f = 0$ nach Voraussetzung. ⟩⟩⟩

Zum Abschluss beweisen wir noch den folgenden

Satz des Archimedes *Die Auftriebskraft eines in einer homogenen Flüssigkeit befindlichen Körpers ist gleich dem Gewicht des von diesem Körper verdrängten Volumens. ✕*

««« Die Flüssigkeit fülle das Gebiet $\mathbb{M} = \{z \leq 0\}$ aus und habe die homogene Dichte 1. Der an einem Punkt in der Tiefe z ausgeübte Druck entspricht der Höhe der Flüssigkeitssäule über dem Punkt und ist nach unten gerichtet. Wegen $z < 0$ ist er also

$$P = ze_z.$$

Sei nun M eine berandete 3-Mannigfaltigkeit in \mathbb{M} . Der auf einen Randpunkt p von M wirkende Druck ist die in Normalenrichtung wirkende Komponente des Druckvektors

$$P_n = \langle P, n \rangle n.$$

Diese ist mit dem Flächenelement dA zu multiplizieren und über den gesamten Rand von M zu integrieren. Die Auftriebskraft ist demnach

$$F = \int_{\partial M} \langle P, n \rangle dA.$$

Darauf können wir den Divergenzsatz anwenden. Wegen $\operatorname{div} P = 1$ erhalten wir

$$F = \int_{\partial M} \langle P, n \rangle dA = \int_M \operatorname{div} P dV = \int_M dV = |M|.$$

Da wir die Dichte der Flüssigkeit auf 1 normalisiert hatten, entspricht der letzte Wert dem Gewicht der von M verdrängten Flüssigkeit. »»»

Abb 16 Zum Satz des Archimedes

