25. Vorlesung 2.2.2022

Bew.: Für $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $cf \in \mathcal{L}^p$,

Lemma Seien $f, g \in \mathcal{L}^p$, so ist $f+g$ messbar, und

$$|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p$$
$$\leq (2 \sup(|f|,|g|))^p$$
$$\leq 2^p (|f|^p + |g|^p)$$

integrierbar

integrierbar

$\Rightarrow f+g \in \mathcal{L}^p.$ □

Bem.: Raum $\mathcal{L}^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu)$ ist der Raum der integrierbaren Funktionen.

$$\|f\|_p = 0 \iff \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, d\mu = 0$$

$$\iff |f|^p =_\mu 0$$

$$\iff f =_\mu 0.$$

$f \in \mathcal{L}^p$:

$$[f] = \{ f + \varphi : \varphi \in \mathcal{N}(\mu) \}$$

$$= \{ g \in \mathcal{L}^p : g =_\mu f \}$$

$\|f\|_p$: $f =_\mu g$

$\Rightarrow \quad |f|^p =_\mu |g|^p$

$\Rightarrow \quad \|f\|_p = \|g\|_p$

Also gilt:

$$\|[f]\|_p =: \|f\|_p$$

Damit für VR-Operation:

$$[\lambda f] = \lambda [f]$$

$$[f+g] = [f] + [g]$$

Normeigenschaften:

Definitheit:

$$\|[f]\|_p = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \|f\|_p = 0$$

$$\Longrightarrow \quad f =_\mu 0$$

$$\Longrightarrow \quad f \in \mathcal{N}(\mu)$$

$$\Longrightarrow \quad [f] = [0].$$

Positive Homog.:

$$\|\lambda[f]\|_p = \left(\int |\lambda f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

$$= |\lambda| \cdot \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$$

$$= |\lambda| \cdot \|[f]\|_p . \qquad \blacksquare$$

$$\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$$

$$= \bigcup_{n \ge 1} \{x : |f(x)| > \underbrace{\|f\|_\infty + \tfrac{1}{n}}_{\alpha}\}$$

μ-measure zero

μ-measure zero

Also:

$$|f| \le_\mu \|f\|_\infty .$$

Beweis: Es ist $|g| \leq_\mu \|g\|_\infty$, so dass

$$|fg| \leq_\mu |f| \cdot \|g\|_\infty$$

Also ist fg integrierbar, und

$$\|fg\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |fg| \, d\mu$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f| \cdot \|g\|_\infty \, d\mu$$

$$\leq \|g\|_\infty \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, d\mu$$

$$= \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty . \qquad \blacksquare$$

$$\mathcal{N}(\mu) = \{ f \in \mathcal{M}^\infty(\mu) : f =_\mu 0 \}$$

Beweis: $f, g \in \mathcal{L}^\infty$:

$$|f| \le_\mu \|f\|_\infty$$

$$|g| \le_\mu \|g\|_\infty$$

$\Longrightarrow$

$$|f+g| \le |f| + |g| \le_\mu \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$\Longrightarrow$ $$\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \qquad \blacksquare$$

$$f =_\mu 0 \iff f(x_i) = 0, \quad 1 \le i \le n,$$

$$f =_\mu g \iff f(x_i) = g(x_i), \quad 1 \le i \le n$$

Also:

$[f]$ behält nur die Werte

$$x_i = f(x_i)$$

$$\|f\|_p = \Big(\sum_{1 \le i \le n} |x_i|^p \Big)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$$

$$\|f\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i| .$$

$$L^p(\mu) \cong \mathbb{R}^n,$$

$\|\cdot\|_p$

(f) einseitig unendliche Folge

$$x = (x_n)_{n \geq 1} = (f(n))_{n \geq 1} .$$

Norm:

$$\|f\|_p = \left(\sum_{n \geq 1} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |x_n|$$

Die Norm:

$$\|f\|_{p,E} = \|f_E\|_p$$

$$= \left(\int_E |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} , \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|f\|_{\infty,E} = \|f_E\|_\infty .$$