24

L^p-Räume

Die Entwicklung des Lebesgueintegrals führte zum Raum $\mathcal{L}^n(\mu)$ aller lebesgue-integrierbaren Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$. Wir gehen nun einen Schritt weiter und betrachten die Räume derjenigen μ-messbaren Funktionen, für die

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$$

endlich ist. Für $1 \leqslant p < \infty$ erhält man so normierte Vektorräume $L^p(\mu)$, wenn man noch Funktionen identifiziert, die μ-fast überall gleich sind.

Diese L^p-Räume sind *vollständig*, also *Banachräume*, und spielen deshalb in der höheren Analysis dieselbe zentrale Rolle, die die reellen Zahlen in der klassischen Analysis spielen. In diesem Räumen haben auch Faltungen und Glättungen ihren natürlichen Platz.

24.1 Definition der Räume

Sei $\mathcal{M}^n(\mu)$ wieder der Raum aller bezüglich eines Maßes μ messbaren Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$. Wir definieren darin Unterräume von Funktionen, die durch eine Integrierbarkeitsbedingung charakterisiert sind.

Für $f \in \mathcal{M}^n(\mu)$ und $p > 0$ sei

$$\|f\|_p \coloneqq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p},$$

wobei auch der Wert ∞ zugelassen ist. Ferner sei

$$\mathcal{L}^p(\mu) \coloneqq \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \mu) \coloneqq \{f \in \mathcal{M}^n(\mu) : \|f\|_p < \infty\}.$$

Insbesondere ist $\mathcal{L}^1(\mu)$ der bereits bekannte Raum aller μ-integrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. [1]

1 **Lemma** *Für jedes $p > 0$ ist $\mathcal{L}^p(\mu)$ ein reeller Vektorraum.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Mit [2] $f \in \mathcal{L}^p$ ist offensichtlich auch $cf \in \mathcal{L}^p$ für jedes $c \in \mathbb{R}$. Sind $f, g \in \mathcal{L}^p$, so ist $f + g$ messbar, und es gilt

$$|f + g|^p \leqslant (|f| + |g|)^p \leqslant (2\sup(|f|, |g|))^p \leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p).$$

Nach Voraussetzung sind $|f|^p$ und $|g|^p$ integrierbar, also auch $|f|^p + |g|^p$. Also ist auch $|f + g|^p$ integrierbar $_{20.27}$ und damit $f + g \in \mathcal{L}^p$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Als Erstes wollen wir die Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_p$ verifizieren. Diese gilt allerdings nur für $p \geqslant 1$. Für $0 < p < 1$ gilt dagegen

$$\|f + g\|_p^p \leqslant \|f\|_p^p + \|g\|_p^p,$$

und die Dreiecksungleichung gilt *nicht*, wenn das Maß μ auf zwei disjunkten Mengen nicht verschwindet $_{\text{A-2}}$.

Die Ungleichungen von Young, Hölder und Minkowski

Zunächst benötigen wir drei fundamentale Ungleichungen.

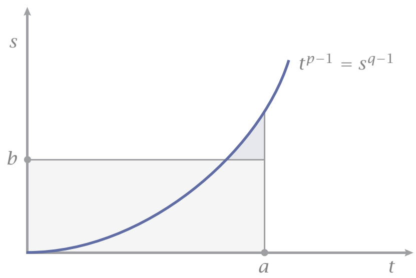
Definition *Zwei reelle Zahlen $p, q > 0$ heißen konjugierte Exponenten oder kurz konjugiert, wenn*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \qquad ⋊$$

[1] Diesen hatten wir bisher mit $\mathcal{L}^n(\mu)$ bezeichnet. Doch jetzt ist der Exponent p wichtiger.
[2] Das Maß μ ist im Folgenden immer fest. Daher notieren wir es nicht jedes Mal.

Abb 1

Zur Youngschen Ungleichung



Notwendigerweise ist dann $1 < p, q < \infty$. Außerdem gelten für konjugierte Exponenten die oft benötigten Identitäten

$$\begin{aligned} p + q = pq \quad &\Leftrightarrow \quad (p-1)(q-1) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad p(q-1) = q \\ &\Leftrightarrow \quad q(p-1) = p. \end{aligned}$$

Die einzigen *selbstkonjugierten Exponenten* sind $p = 2$ und $q = 2$. — Im Kontext konvexer Funktionen hatten wir bereits folgende Ungleichung bewiesen $_{15.21}$.

2 **Youngsche Ungleichung** *Für nichtnegative reelle Zahlen a, b und konjugierte Exponenten p, q gilt*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $a^p = b^q$. ⋊

⟪⟪ Hier noch ein geometrischer Beweis. — Es ist bekanntlich

$$\frac{a^p}{p} = \int_0^a t^{p-1}\,\mathrm{d}t, \qquad \frac{b^q}{q} = \int_0^b s^{q-1}\,\mathrm{d}s.$$

Wegen $(p-1)(q-1) = 1$ ist s^{q-1} die Umkehrfunktion von t^{p-1}, und die beiden letzten Integrale repräsentieren die schattierten Flächenstücke in Abbildung 1. Diese enthalten somit immer das Rechteck mit den Seiten a und b. Also gilt

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Gleichheit gilt genau für $b = a^{p-1}$, also $b^q = a^{q(p-1)} = a^p$. ⟫⟫

3 **Höldersche Ungleichung** *Ist $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ mit konjugierten Exponenten p und q, so ist $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$, und es gilt*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q. \quad ⋊$$

Ausgeschrieben lautet diese Ungleichung

$$\int |fg| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \left(\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \left(\int |g|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}.$$

Dies gilt übrigens auch, wenn eines der Integrale unbeschränkt ist.

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir können $\|f\|_p > 0$ und $\|g\|_q > 0$ annehmen. Denn andernfalls verschwindet mindestens eine der Funktionen fast überall $_{20.26}$, damit auch fg, und beide Seiten der Ungleichung sind Null.

Wegen $\|f\|_p < \infty$ und $\|g\|_q < \infty$ sind f und g fast überall endlich $_{20.26}$, so dass aufgrund der Youngschen Ungleichung $_{15.21}$

$$\frac{|f|}{\|f\|_p} \frac{|g|}{\|g\|_q} \leqslant_\mu \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Nach Voraussetzung ist die rechte Seite integrierbar. Also ist auch $|fg|$ integrierbar $_{20.27}$ und damit $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Integration ergibt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int |fg| \,\mathrm{d}\mu \\ &\qquad \leqslant \frac{1}{p} \frac{1}{\|f\|_p^p} \int |f|^p \,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q} \frac{1}{\|g\|_q^q} \int |g|^q \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zur behaupteten Ungleichung. ⟩⟩⟩⟩⟩

Im Fall selbstadjungierter Exponenten wird die Höldersche Ungleichung zur Cauchy-Schwarzschen Ungleichung $_{5.29}$ in Integralform, also

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_2 \,\|g\|_2 .$$

Mithilfe der Hölderschen Ungleichung erhalten wir die

4 **Minkowskische Ungleichung** *Für $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ mit $p \geqslant 1$ gilt*

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p . \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Für $p = 1$ erhalten wir sofort [3]

$$\|f + g\|_1 = \int |f + g| \leqslant \int |f| + \int |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1 .$$

Sei also $p > 1$. Es ist

$$|f + g|^p = |f + g|^{p-1} |f + g| \leqslant |f|\,|f + g|^{p-1} + |g|\,|f + g|^{p-1} .$$

Mit dem zu p konjugierten Exponenten q ist $(p-1)q = p$ und somit

$$|f + g|^{(p-1)q} = |f + g|^p$$

[3] Wir lassen jetzt des öfteren $\mathrm{d}\mu$ wie auch schon $\mathbb{R}^n$ fallen, um die Notation zu vereinfachen.

integrierbar, da ja $f+g \in \mathcal{L}^p{}_1$. Wir können deshalb die Höldersche Ungleichung auf beide Summanden anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\int |f+g|^p &\leqslant \left(\int |f|^p\right)^{1/p}\left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\ &\quad + \left(\int |g|^p\right)^{1/p}\left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\ &= \left\{\left(\int |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p\right)^{1/p}\right\}\left(\int |f+g|^p\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Mit anderen Worten, es gilt

$$\|f+g\|_p^p \leqslant (\|f\|_p + \|g\|_p)\,\|f+g\|_p^{p/q}.$$

Ist nun $\|f+g\|_p = 0$, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls dividieren wir durch $\|f+g\|_p^{p/q}$ und erhalten wegen $p - p/q = 1$ die Behauptung. ⟫⟫⟫

- **Der Raum L^p für $1 \leqslant p < \infty$**

Die Minkowskische Ungleichung ist die *Dreiecksungleichung* für $\|\cdot\|_p$. Trotzdem erhalten wir damit noch *keine Norm* auf $\mathcal{L}^p(\mu)$, denn es gilt nur 20.26

$$\|f\|_p = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \,\mathrm{d}\mu = 0 \quad\Leftrightarrow\quad |f|^p =_\mu 0 \quad\Leftrightarrow\quad f =_\mu 0.$$

Somit mangelt es $\|\cdot\|_p$ auf $\mathcal{L}^p(\mu)$ an der *Definitheit*.

Diesen Defekt behebt man in kanonischer Weise, indem man $\mathcal{L}^p$ durch den entsprechenden Nullraum

$$N(\mu) \coloneqq \{f \in \mathcal{M}^n(\mu) : f =_\mu 0\}$$

dividiert. Dies ist ein linearer Unterraum von $\mathcal{M}^n(\mu)$ mit folgenden Eigenschaften, deren einfachen Beweis wir übergeben.

5 **Lemma** *Für eine Funktion $f \in \mathcal{M}^n(\mu)$ sind äquivalent:*
(i) $f \in N(\mu)$.
(ii) $\|f\|_p = 0$ *für ein* $p > 0$.
(iii) $\|f\|_p = 0$ *für alle* $p > 0$.
(iv) $\{|f| > 0\}$ *ist eine μ-Nullmenge.* ⋊

Definition *Für $p > 0$ heißt*

$$L^p(\mu) \coloneqq L^p(\mathbb{R}^n, \mu) \coloneqq \mathcal{L}^p(\mu)/N(\mu)$$

der Lebesgueraum L^p auf $\mathbb{R}^n$ bezüglich μ. ⋊

Im Unterschied zu $\mathcal{L}^p$ sind die Elemente von L^p also keine *Funktionen*, sondern *Äquivalenzklassen* von Funktionen. Die einer Funktion $f \in \mathcal{L}^p$ zugeordnete Äquivalenzklasse ist die Nebenklasse

$$[f] = \{f + \phi : \phi \in N(\mu)\} = \{g \in \mathcal{L}^p(\mu) : g =_\mu f\}$$

aller Funktionen, die μ-fast überall mit f übereinstimmen. Daher macht es keinen Sinn, von dem *Wert* von $[f]$ an einem bestimmten Punkt zu sprechen, wenn dieser Punkt Maß Null hat. Auf Mengen vom Maß Null sind solche Funktionen unbestimmt – man kann sie dort umdefinieren, ohne an der Äquivalenzklasse etwas zu ändern. Dies läuft der naiven Vorstellung von einer Funktion $_{1.9}$ zugegebenermaßen zuwider und bedarf einer gewissen Gewöhnung.

Dagegen ist $\|\cdot\|_p$ wohldefiniert, denn aus $f =_\mu g$ folgt $|f|^p =_\mu |g|^p$ und damit $\|f\|_p = \|g\|_p$. Es gilt also

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p .$$

Dasselbe gilt für die Vektorraumoperationen:

$$[\lambda f] = \lambda\,[f], \qquad [f] + [g] = [f + g],$$

denn das Ergebnis ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten. Somit ist $L^p(\mu)$ ebenfalls ein *reeller Vektorraum.*

Satz *Der Vektorraum $L^p(\mu)$ zusammen mit der Funktion $\|\cdot\|_p$ ist für $p \geqslant 1$ ein normierter Vektorraum.* ⋊

⟪⟪⟪ Wir müssen die Normeigenschaften nachweisen. Die Definitheit gilt per Konstruktion:

$$\|[f]\|_p = 0 \;\Rightarrow\; \|f\|_p = 0 \;\Rightarrow\; f =_\mu 0 \;\Rightarrow\; [f] = [0].$$

Die positive Homogenität ist offensichtlich:

$$\|\lambda\,[f]\|_p = \left(\int |\lambda f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = |\lambda| \left(\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = |\lambda|\,\|[f]\|_p .$$

Die Dreiecksungleichung ergibt sich aus der Minkowskischen Ungleichung $_4$. ⟫⟫⟫

Bemerkung Es ist natürlich lästig, immer von den Äquivalenzklassen $[f]$ zu sprechen. Wir werden deshalb auch weiterhin etwas unbekümmert von ›Funktionen‹ f sprechen und nur bei Gelegenheit darauf hinweisen, dass diese nur μ-fast überall wohldefiniert sind. ⊸

24.6

▪ Der Raum L^∞

Strebt ein konjugierter Exponent gegen 1, so strebt der andere gegen ∞. Deshalb werden 1 und ∞ ebenfalls als konjugierte Exponenten betrachtet. Die Frage stellt sich daher, ob es auch einen entsprechenden Raum $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ gibt.

Dieser Raum wird über das Supremum einer Funktion definiert. Die klassische Supremumsnorm ist jedoch nicht geeignet, da die Werte von messbaren Funktionen auf Mengen vom Maß Null nicht wohldefiniert sind. Statt dessen betrachten wir für $f \in \mathcal{M}^n(\mu)$ das *wesentliche Supremum*

$$\|f\|_\infty \coloneqq \operatorname{ess\,sup} |f| \coloneqq \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : |f| \leqslant_\mu \alpha\}.$$

Ist die rechts stehende Menge leer, so ist vereinbarungsgemäß $\|f\|_\infty = \infty$, und f ist *im wesentlichen unbeschränkt*. Ist dagegen $\|f\|_\infty$ endlich, so ist

$$\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\} = \bigcup_{n \geqslant 1} \{x : |f(x| > \|f\|_\infty + 1/n\}$$

eine μ-Nullmenge, da jede der rechts stehenden Mengen aufgrund der Definition von $\|f\|_\infty$ eine μ-Nullmenge bildet. Es gilt somit

$$|f| \leqslant_\mu \|f\|_\infty .$$

Ist dieser Wert nicht endlich, so gibt es keine Nullmenge, außerhalb der $|f|$ beschränkt ist. Die letzte Ungleichung bleibt gültig, auch wenn sie trivial ist.

Es ist nicht schwer zu erkennen, dass

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) \coloneqq \{f \in \mathcal{M}^n(\mu) : \|f\|_\infty < \infty\}$$

wieder ein reeller Vektorraum ist. Auch gilt die entsprechende

6 **Höldersche Ungleichung für L^1 und L^∞** *Für $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ ist $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$, und es gilt*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_1 \, \|g\|_\infty . \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist $|g| \leqslant_\mu \|g\|_\infty < \infty$, so ist $|fg| \leqslant_\mu |f| \, \|g\|_\infty$. Also ist fg integrierbar ${}_{20.27}$, und es gilt

$$\|fg\|_1 = \int |fg| \, \mathrm{d}\mu \leqslant \|g\|_\infty \int |f| \, \mathrm{d}\mu = \|g\|_\infty \, \|f\|_1 . \qquad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

Dem wesentlichen Supremum auf $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ mangelt es ebenfalls an der Definitheit. Aber auch hier ist

$$\{f \in \mathcal{L}^\infty(\mu) : \|f\|_\infty = 0\} = \{f \in \mathcal{M}^n(\mu) : f =_\mu 0\} = N(\mu)$$

derselbe Nullraum wie bei der Betrachtung der $\mathcal{L}^p$-Räume ${}_5$.

Definition und Satz *Der Raum*

$$L^\infty(\mu) := L^\infty(\mathbb{R}^n,\mu) := \mathcal{L}^\infty(\mu)/N(\mu)$$

heißt der Lebesgueraum L^∞ auf $\mathbb{R}^n$ bezüglich μ. Mit der wesentlichen Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ wird dies ein normierter Vektorraum. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Wir betrachten nur die Dreiecksungleichung. Aus $|f| \leqslant_\mu \|f\|_\infty$ und $|g| \leqslant_\mu \|g\|_\infty$ folgt

$$|f+g| \leqslant |f| + |g| \leqslant_\mu \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

Dann ist aber auch $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. ⟩⟩⟩⟩

▪ **Beispiele**

Endliche Masseverteilung Sei μ eine diskrete Masseverteilung auf $n \geqslant 1$ Punkten $p_1,..,p_n$ mit

$$\mu(\{p_i\}) = 1, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Jede Menge, die keinen dieser Punkte enthält, ist eine μ-Nullmenge. Es gilt somit

$$f =_\mu 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(p_i) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Dementsprechend gilt

$$f =_\mu g \quad \Leftrightarrow \quad f(p_i) = g(p_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Jede Äquivalenzklasse $[f]$ ist somit durch die n Werte $x_i = f(p_i)$ eindeutig bestimmt, und deren L^p-Norm ist

$$\|f\|_p = \Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|^p\Big)^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p < \infty,$$

respektive

$$\|f\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| .$$

Somit können wir in diesem Fall $L^p(\mu)$ mit dem $\mathbb{R}^n$ identifizieren. Darüberhinaus ergibt sich, dass $\|\cdot\|_p$ *für alle* $p \geqslant 1$ eine *Norm* auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert – dies hatten wir bisher nur für $p \in \{1,2,\infty\}$ gezeigt. Diese Normen sind übrigens alle äquivalent $_{7.31}$. — Wir notieren noch die Höldersche Ungleichung für diesen Fall.

Notiz *Für $x,y \in \mathbb{R}^n$ und konjugierte Exponenten $1 \leqslant p,q \leqslant \infty$ gilt*

$$|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|_p \, \|y\|_q ,$$

wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt bezeichnet. ⋊

24.8

Abzählbar Masseverteilung Sei μ eine diskrete Masseverteilung auf abzählbar unendlich vielen Punkten $p_1, p_2, ..$ mit Punktmassen 1 wie zuvor. Dann ist die Äquivalenzklasse von $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ eindeutig bestimmt durch die *Folge* der Funktionswerte $x = (x_k)_{k\geqslant 1} = (f(p_k))_{k\geqslant 1}$. Ihre L^p-Norm ist

$$\|x\|_p = \Bigl(\sum_{k\geqslant 1} |x_k|^p\Bigr)^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p < \infty,$$

respektive

$$\|x\|_\infty = \sup_{k\geqslant 1} |x_k| .$$

Wir erhalten Räume von reellen Zahlenfolgen, die als *Lebesgueschen Folgenräume* ℓ^p bezeichnet werden:

$$\ell^p \coloneqq \{x = (x_k)_{k\geqslant 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|x\|_p < \infty\}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Die Normen sind hier allerdings nicht mehr äquivalent. Vielmehr gilt $\ell^p \subsetneq \ell^q$ für $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$.

Entsprechend werden die Räume $\ell^p_{\mathbb{C}}$ komplexer Zahlenfolgen definiert.

Die Räume $L^p(E,\mu)$ Sei E eine μ-messbaren Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Die triviale Fortsetzung einer Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ zu einer Funktion $f_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei

$$f_E \coloneqq f\chi_E \coloneqq \begin{cases} f & \text{auf } E, \\ 0 & \text{auf } E^c. \end{cases}$$

Damit definieren wir

$$L^p(E,\mu) \coloneqq \{f : E \to \mathbb{R} : f_E \in L^p(\mathbb{R}^n,\mu)\}.$$

Die diesbezüglichen Normen bezeichnen wir mit

$$\|f\|_{p,E} \coloneqq \|f_E\|_p = \Bigl(\int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu\Bigr)^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p < \infty,$$

respektive

$$\|f\|_{\infty,E} \coloneqq \|f_E\|_\infty .$$

Diese Räume können wir mit Untervektorräume von $L^p(\mathbb{R}^n,\mu)$ identifizieren, oder auch mit einem Raum $L^p(\mathbb{R}^n,\mu_E)$, wenn man μ_E geeignet definiert.