26. Vorlesung 3.2.2022

Es gilt

$$f_n \xrightarrow{L^p} f$$

gdw

$$\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0 .$$

Dann auch $(f_n)$ Cauchy-Folge

**Beweis:** Sei $(f_n)$ CF in $L^p$, $p < \infty$.

Zu jedem $n \geq 1$ ex. ein $N_n$:

$$\|f_k - f_l\|_p < \frac{1}{2^n}, \quad k, l \geq N_n .$$

OBdA $N_n \uparrow$, definiere dann

$$g_n := f_{N_n}, \qquad n \geq 1$$

Teilfolge von $(f_n)$:

$$\|g_{n+1} - g_n\|_p < \frac{1}{2^n}, \quad n \geq 1 .$$

**Beweis:** Betrachte

$$\underbrace{h_n := |g_1| + \sum_{1\le m\le n} |g_{m+1} - g_m|,}\quad n\ge 1.$$

monotone steigend,

$$\|h_n\|_p \le \|g_1\|_p + \sum \underbrace{\|g_{m+1} - g_m\|_p}_{< \frac{1}{2^m}}$$

$$\le \|g_1\|_p + 1 < \infty, \quad n \ge 1.$$

$\Longrightarrow$ $h_n \nearrow_{f.ü.} h$

Satz von monotoner Konvergenz: $\|h\|_p < \infty$

$\Longrightarrow$ $h <_{f} \infty$.

Damit gilt auch:

$$g_n = g_1 + \sum_{1\le m\le n} (g_{m+1} - g_m)$$

f.ü. konv. gegen eine Funktion $f$:

$$g_n \longrightarrow f \quad \text{f.ü.}$$

Da

$$|f| \le_{f.ü.} h \in L^p,$$

gilt auch $f \in L^p$. ∎

**Beweis:** Sei $p < \infty$, $(f_k)$ CF in $L^p(\mu)$.

Dann ex. eine Teilfolge $(g_n)$ und $f \in L^p$:

$$g_n \xrightarrow{\mu} f \ .$$

Fatou:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g_n - f|^p \, d\mu \le \liminf_{m:\ m \ge n} \int |g_n - g_m|^p \, d\mu$$

Also gilt sogar:

$$\|g_n - f\|_p \le \liminf \|g_n - g_m\|_p \longrightarrow 0$$

Weil CF-Eigenschaft:

$$\|f_k - f\|_p \le \underbrace{\|f_k - g_n\|_p}_{\text{wird und beliebig klein}} + \underbrace{\|g_n - f\|_p}_{\to 0} \longrightarrow 0 .$$

$p = \infty$: Dann ist dies gleichmäßige Konvergenz auf $X$, und

$$|f_n(x)| \le \|f_n\|_\infty ,$$

$$|f_n(x) - f_k(x)| \le \|f_n - f_k\|_\infty$$

Damit konvergiert punktweise an $X$ $(f_n)$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f$.

$$|f_n - f| = \lim_{k\to\infty} |f_n - f_k| \le \sup_{k:\, k \ge n} \|f_n - f_k\|_\infty$$

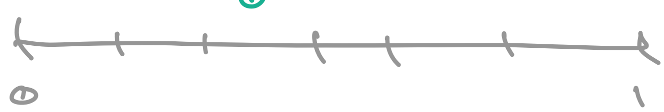
Dann folgt auch

$$\|f_n - f\|_\infty \le \sup \text{———} \to 0, \quad n \to \infty.$$

$\square$

Bsp: Betrachte die Intervalle

$$\left(\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}\right), \quad 1 \leq m \leq n, \quad n = 1,2,3,\dots$$

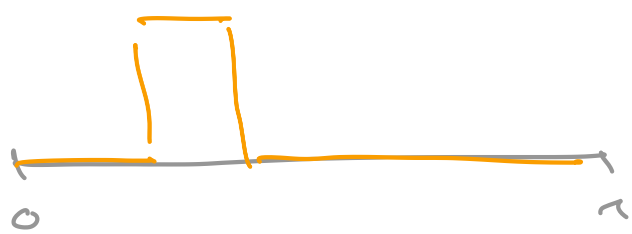


$n=6$

Nummeriere alle diese Intervalle als $I_n$, sodass

$$|I_n| \to 0.$$

Betrachte $f_n = \chi_{I_n}$ $\qquad p < \infty$



Dann gilt:

$$\|f_n\|_p = |I_n|^{1/p} \longrightarrow 0$$

aber $f_n$ ist an keiner einzigen Stelle in $[0,1]$ konvergent.

Bsp.: Betrachte

$$f_n = \sqrt[p]{n}\,\chi_{(0,\frac{1}{n})} \longrightarrow 0 \quad \text{f.ü.}$$

aber

$$\|f_n\|_p = 1.$$

Auch gleichmäßige Konvergenz reicht nicht:

$$g_n = \frac{1}{\sqrt[p]{n}}\,\chi_{(0,n)} \rightrightarrows 0,$$

aber

$$\|g_n\|_p = 1 \quad \text{für alle } n.$$

**Proof:** $f_n \to$ [illegible] [illegible]

$$|f| \leq_\mu g$$

$$\Longrightarrow \quad f \in \mathcal{L}^p .$$

Consider [illegible] [illegible]:

$$\underbrace{|f_n - f|^p}_{} \leq (|f_n| + |f|)^p \leq_\mu \underbrace{2^p g^p}_{\text{integrable}}$$

Satisfy [illegible] conditions of [illegible]:

$$\int |f_n - f|^p \longrightarrow 0 .$$

[illegible] [illegible] [illegible] $\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0.$ $\blacksquare$

Bem.:

$$E \hookrightarrow F$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathrm{id}: E \to F \quad \text{stetig}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathrm{id} \quad \text{beschränkt}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \|\mathrm{id}\|_0 < \infty$$

$$= \sup_{0 \neq x \in E} \frac{\|\mathrm{id}(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

$$= \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|_F}{\|x\|_E}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \|x\|_F \leq c \cdot \|x\|_E .$$

Also:

$$\|\cdot\|_F \leq c \cdot \|\cdot\|_E .$$

**Beweis:** Sei also $x \in \ell^1$, $x \neq 0$.

OBdA: $\|x\|_1 = 1$.

Dann: $|x_n| \leq 1$, $n \geq 1$

$$\Rightarrow \quad \|x\|_\infty \leq 1 = \|x\|_1 .$$

Für $1 < p < \infty$:

$$\sum_{n \geq 1} |x_n|^p \leq \sum_{n \geq 1} |x_n|^1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \|x\|_p \leq \|x\|_1 = 1 .$$

**Bem.:** $\ell^q \hookrightarrow \ell^p$ dicht für $q < p < \infty$.

Dann sei $x \in \ell^p$, und $\varepsilon > 0$, so $N$ mit

$$\sum_{k > N} |x_k|^p < \varepsilon^p$$

Dann gilt für $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_N, 0, \dots, 0)$:

$$\tilde{x} \in \ell^q,$$

$$\|\tilde{x} - x\|_p = \Big(\sum_{k > N} |x_k|^p\Big)^{1/p} < \varepsilon.$$

**Für $\ell^\infty$ falsch:**

wähle $x = (1, 1, 1, \dots) \in \ell^\infty$.

Für jedes $\tilde{x} \in \ell^q$, $q < \infty$, gilt dann

$$\|\tilde{x} - x\|_\infty \geq 1. \qquad \blacksquare$$

Beweis: Sei $f \in L^p$, $q < p$.

Sei $p < \infty$. Dann gilt

$$|f|^q \in L^r(E, \mu), \quad r := \frac{p}{q} > 1 \qquad r \cdot q = p$$

$$|f|^{qr} = |f|^p$$

Sei also $s$ konjugiert zu $r$:

$$\int_E |f|^q \cdot 1 \le \underbrace{\left( \int_E |f|^{\overset{= p}{qr}} \right)^{1/r}} \cdot \underbrace{\left( \int_E 1^s \right)^{1/s}}$$

$$\le \mu(E)^{1/s} \cdot \|f\|_p^q \qquad \frac{p}{r} = q$$

$$< \infty$$

Also: $f \in L^q$ und

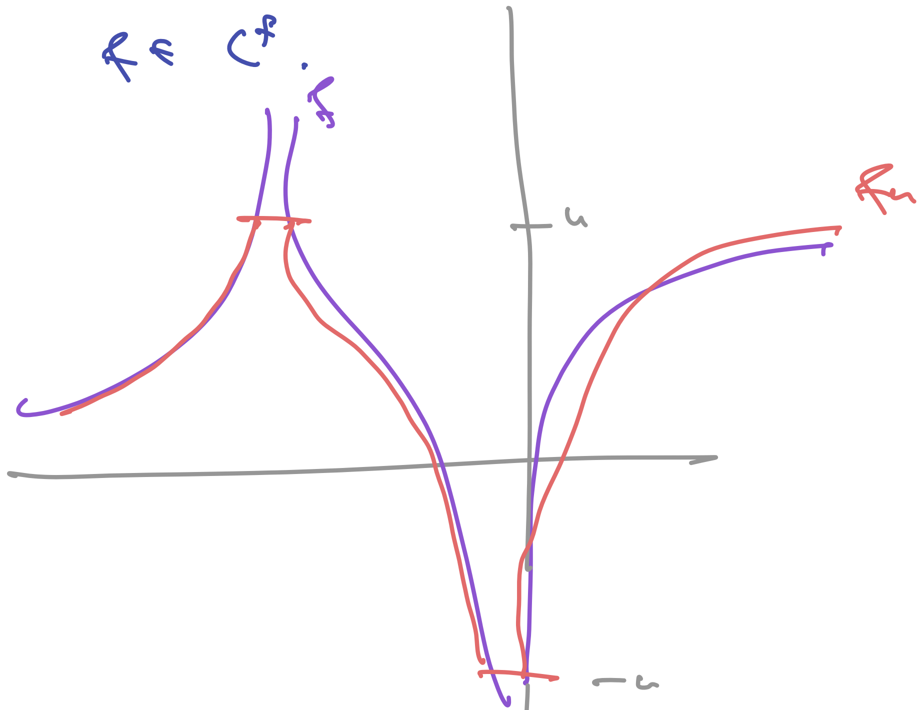
$$\|f\|_q \le \mu(E)^{\frac{1}{sq}} \cdot \|f\|_p .$$

Denn $\frac{1}{sq} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$:

$$1 = \frac{1}{s} + \frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{q}{p}$$

$$\frac{1}{sq} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}. \qquad \Longrightarrow \text{Beh.}$$

**Dicht.:** Sei $f \in \mathcal{L}^p$.




Definiere

$$f_n = \max(\min(f, n), -n)$$

Dann $f_n \in \mathcal{L}^p$ für alle $n$ und $p \geq 1$

sowie

$$|f - f_n| \leq |f|, \quad f - f_n \xrightarrow{n} 0.$$

Dom. Konv.:

$$\|f - f_n\|_p \longrightarrow 0$$

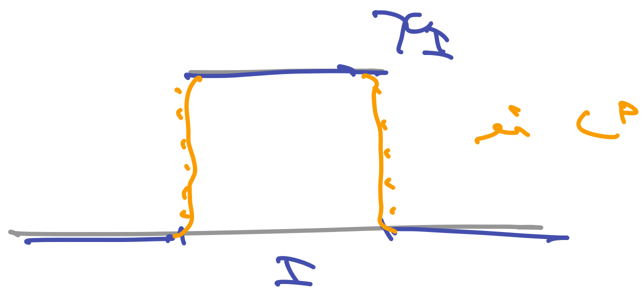
**Bemerkung:** Sei $f \in L^p$, $p < \infty$, $\varepsilon > 0$:

Dann $\exists\ \tau$ Treppenfunktion:

$$\| f - \tau \|_p < \varepsilon.$$

$\tau$ Linearkombination von char. Funktion

zu Glätten:



Bem.: Auf $C_c(\mathbb{R}^n)$ definiert

$$\|f\|_p = \Big( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \Big)^{1/p}$$

ein Norm, denn auch definit:

$$f \in C_c(\mathbb{R}^n) \text{ und } \|f\|_p = 0 \implies f \equiv 0.$$

Aber $C_c(\mathbb{R}^n)$ nicht vollständig.

Lange Satz 13:

$L^p(\mathbb{R}^n)$ ist die Vervollständigung von $C_c(\mathbb{R}^n)$ bzgl. $\|\cdot\|_p$.