24.2 Vollständigkeit

Die Lebesgueräume $L^p(\mu)$ werden mit $\|\cdot\|_p$ zu normierten Räumen. Somit ist auch der Begriff der Konvergenz erklärt. Eine Folge (f_k) konvergiert in L^p gegen eine Funktion $f \in L^p$ genau dann, wenn

$$\|f_k - f\|_p \to 0.$$

Jede solche Folge bildet auch eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_p$. Damit stellt sich die Frage, ob umgekehrt jede solche Cauchyfolge einen Grenzwert in L^p hat. Mit anderen Worten: *Sind die L^p-Räume vollständig*?

Zuerst ein auch für sich interessantes Zwischenergebnis.

7 **Lemma** *Ist (f_k) eine Cauchyfolge in L^p mit $1 \leqslant p < \infty$, so konvergiert eine Teilfolge punktweise fast überall gegen eine Funktion f in L^p.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist (f_k) eine Cauchyfolge in L^p, so existiert zu jedem $n \geqslant 1$ ein N_n, so dass

$$\|f_k - f_l\|_p < \frac{1}{2^n}, \qquad k, l \geqslant N_n.$$

Wählen wir die N_n noch monoton steigend mit n, so bildet $(g_n) \coloneqq (f_{N_n})$ eine Teilfolge von (f_k) mit

$$\|g_{n+1} - g_n\|_p < \frac{1}{2^n}, \qquad n \geqslant 1.$$

Die Funktionen

$$h_n = |g_1| + \sum_{1 \leqslant m < n} |g_{m+1} - g_m|, \qquad n \geqslant 1,$$

bilden eine monoton steigende Folge messbarer Funktionen mit 4

$$\|h_n\|_p \leqslant \|g_1\|_p + \sum_{1 \leqslant m < n} \|g_{m+1} - g_m\|_p \leqslant \|g_1\|_p + 1 < \infty,$$

die punktweise gegen eine Funktion h konvergieren. Aufgrund des Lemmas von Fatou 20.25 ist $h \in L^p$ und damit $h <_\mu \infty$. Wegen

$$h_n \to h <_\mu \infty$$

konvergiert auch

$$g_n = g_1 + \sum_{1 \leqslant m < n} (g_{m+1} - g_m)$$

punktweise fast überall gegen eine Funktion f. Wegen $|f| \leqslant_\mu h \in L^p$ ist dabei auch $f \in L^p$. ⟩⟩⟩⟩⟩

8 **Satz von Riesz-Fischer** *Der Raum $L^p(\mu)$ mit $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ist vollständig und somit ein Banachraum. Zu jeder Cauchyfolge (f_k) in $L^p(\mu)$ existiert also eine eindeutig bestimmte Funktion $f \in L^p(\mu)$ so, dass*

$$\|f_k - f\|_p \to 0, \qquad k \to \infty.$$

Außerdem konvergiert eine Teilfolge punktweise fast überall gegen f. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Sei $1 \leqslant p < \infty$ und (f_k) eine Cauchyfolge in $L^p(\mu)$. Aufgrund des vorangehenden Lemmas 7 existiert eine Teilfolge (g_n), die punktweise fast überall gegen eine Funktion $f \in L^p$ konvergiert. Aufgrund des Lemmas von Fatou 20.25 gilt hierfür

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g_n - f|^p \, \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{m\colon m \geqslant n} \int_{\mathbb{R}^n} |g_n - g_m|^p \, \mathrm{d}\mu.$$

Also gilt auch

$$\|g_n - f\|_p \leqslant \liminf_{m\colon m \geqslant n} \|g_n - g_m\|_p \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Mit der Cauchyfolgen-Eigenschaft gilt dann auch

$$\|f_k - f\|_p \leqslant \|f_k - g_n\|_p + \|g_n - f\|_p \to 0, \qquad k \to \infty$$

bei geeigneter Wahl von n in Abhängigkeit von k.

Betrachte jetzt eine Cauchyfolge (f_k) in $L^\infty(\mu)$. Dann existiert eine gemeinsame Nullmenge N, so dass

$$|f_k(x)| \leqslant \|f_k\|_\infty, \qquad |f_k(x) - f_l(x)| \leqslant \|f_k - f_l\|_\infty, \qquad x \notin N.$$

Somit konvergiert die Folge (f_k) auf N^{c} gleichmäßig gegen eine Funktion f, die wir durch Null zu einer ebenfalls messbaren Funktionen auf dem ganzen Raum fortsetzen. Wegen der punktweisen Ungleichung

$$|f_k - f| =_\mu \lim_{l \to \infty} |f_k - f_l| \leqslant_\mu \sup_{l\colon l \geqslant k} \|f_k - f_l\|_\infty$$

gilt dann auch

$$\|f_k - f\|_\infty \leqslant \sup_{l\colon l \geqslant k} \|f_k - f_l\|_\infty \to 0, \qquad k \to \infty.$$

Damit ist alles gezeigt. ⟩⟩⟩⟩

Eine Cauchyfolge in L^p konvergiert also immer gegen einen eindeutigen Grenzwert f *in* L^p. Außerdem konvergiert eine *Teilfolge* punktweise gegen f 7. Es ist jedoch möglich, dass die *Gesamtfolge* in keinem einzigen Punkt konvergiert, wie das nächste Beispiel zeigt.

▷ *Beispiel* Betrachte die Intervalle

$$\left(\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}\right), \qquad 1 \leqslant m \leqslant n, \quad n = 1, 2, .. ,$$

die wir als (I_k) so durchnummerieren, dass ihre Länge gegen Null konvergiert. Für $f_k = \chi_{I_k}$ gilt dann

$$\|f_k\|_p = |I_k|^{1/p} \to 0$$

und somit $f_k \to 0$ in L^p. Jedoch konvergiert die Folge (f_k) in keinem Punkt von $[0,1]$, da sie in jedem Punkt die Werte 0 und 1 unendlich oft annimmt. ◁

Wir betrachten noch die umgekehrte Frage, wann punktweise Konvergenz die Konvergenz in L^p nach sich zieht. Dies ist nicht immer der Fall.

▷ *Beispiel* Es gilt

$$f_n = n^{1/p}\chi_{(0,1/n)} \to 0$$

punktweise auf $\mathbb{R}$, jedoch
$\|f_n\|_p \equiv 1 \nrightarrow 0$. Gleichmäßige Konvergenz allein ist ebenfalls nicht hinreichend. So gilt

$$g_n = n^{-1/p}\chi_{(0,n)} \rightrightarrows 0,$$

aber wiederum $\|g_n\|_p \equiv 1 \nrightarrow 1$. ◁

Nun das Positive.

9 **Satz** *Sei (f_k) eine Folge in $L^p(\mu)$ mit $1 \leqslant p < \infty$, die punktweise fast überall gegen eine Funktion f konvergiert. Existiert eine Funktion $g \in L^p(\mu)$ mit*

$$|f_k| \leqslant_\mu g, \qquad k \geqslant 1,$$

so ist f in L^p, und die Folge (f_k) konvergiert in $L^p(\mu)$ gegen f. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Aus den Annahmen folgt $|f| \leqslant_\mu g$ und damit $f \in L^p$. Weiterhin gilt punktweise

$$|f_k - f|^p \leqslant (|f_k| + |f|)^p \leqslant_\mu 2^p g^p.$$

Da g^p integrabel ist, folgt mit dem Satz von der dominierten Konvergenz 20.28

$$\lim \int_{\mathbb{R}^n} |f_k - f|^p = \int_{\mathbb{R}^n} \lim |f_k - f|^p = 0.$$

Also gilt auch $\|f_k - f\|_p \to 0$. ⟩⟩⟩⟩

24.3 Einbettungen

Wir betrachten nun die Frage, welche L^p-Räume in anderen enthalten sind. Zunächst eine Definition.

Definition *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Räume mit $E \subset F$. Dann heißt E stetig eingebettet in F, geschrieben $E \hookrightarrow F$, falls die Inklusionsabbildung $\operatorname{inc}\colon E \to F$ stetig ist. Die Einbettung heißt dicht, geschrieben*

$$E \overset{d}{\hookrightarrow} F,$$

falls $\operatorname{inc}(E)$ dicht in F ist. $\rtimes$

Wir bemerken, dass $E \hookrightarrow F$ genau dann, wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass $\|\cdot\|_F \leqslant c\,\|\cdot\|_E$. Denn die lineare Abbildung inc ist stetig genau dann, wenn sie beschränkt ist [14.1], wenn also

$$\|\operatorname{inc}\|_o = \sup_{0 \neq x \in E} \frac{\|\operatorname{inc}(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{0 \neq x \in E} \frac{\|x\|_F}{\|x\|_E} < \infty.$$

Für die Folgenräume sind diese Verhältnisse einfach.

10 **Satz** *Für $1 \leqslant q < p < \infty$ gilt*

$$\ell^q \overset{d}{\hookrightarrow} \ell^p \hookrightarrow \ell^\infty, \qquad \|\cdot\|_p \leqslant \|\cdot\|_q .$$

Dabei ist $\ell^p \hookrightarrow \ell^\infty$ nicht dicht. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $x \in \ell^q$. Da für $x = 0$ nichts zu zeigen ist, sei $x \neq 0$. Aus Homogenitätsgründen können wir $\|x\|_q = 1$ annehmen. Dann ist $|x_k| \leqslant 1$ für alle Folgenglieder von x, also auch $\|x\|_\infty \leqslant 1 = \|x\|_q$. Für $p \in (q, \infty)$ folgt dann

$$\sum_{k \geqslant 1} |x_k|^p \leqslant \sum_{k \geqslant 1} |x_k|^q = 1$$

und damit ebenfalls $\|x\|_p \leqslant 1 = \|x\|_q$. Insbesondere ist $x \in \ell^p$.

Die Einbettung $\ell^q \hookrightarrow \ell^p$ ist dicht. Denn ist $x \in \ell^p$ und $\varepsilon > 0$, so ist

$$\sum_{k > n} |x_k|^p < \varepsilon^p$$

für ein $n \geqslant 1$. Dann ist $\tilde{x} = (x_1, .., x_n, 0, 0, ..) \in \ell^q$ und $\|\tilde{x} - x\|_p < \varepsilon$.

Dagegen kann die konstante Folge $u = (1, 1, ..) \in \ell^\infty$ durch keine ℓ^p-Folge approximiert werden, denn

$$\|u - x\|_\infty \geqslant 1, \qquad x \in \ell^p,$$

da jede Folge in ℓ^p gegen Null konvergiert. Also ist $\ell^p \hookrightarrow \ell^\infty$ *nicht* dicht. ⟩⟩⟩⟩⟩

Für das Lebesguemaß λ auf dem $\mathbb{R}^n$ gilt dagegen

$$L^p(\mathbb{R}^n, \lambda) \not\subset L^q(\mathbb{R}^n, \lambda), \qquad 1 \leqslant p \neq q \leqslant \infty,$$

wie man sich mithilfe geeigneter Funktionen überlegt A-8. Analog zum vorangehenden gilt aber folgender

11 **Satz** *Für $1 \leqslant q < p < \infty$ gilt*

$$L^q(\mu) \cap L^\infty(\mu) \xhookrightarrow{d} L^p(\mu). \qquad \rtimes$$

Anders liegen die Verhältnis auf Teilmengen mit endlichem Maß.

12 **Satz** *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $\mu(E) < \infty$. Für $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$ gilt dann*

$$L^p(E, \mu) \xhookrightarrow{d} L^q(E, \mu), \qquad \frac{\|f\|_q}{\mu(E)^{1/q}} \leqslant \frac{\|f\|_p}{\mu(E)^{1/p}},$$

wobei vereinbarungsgemäß $\mu(E)^{1/p} = 1$ für $p = \infty$. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $f \in L^p$ und $q < p$. Ist $p < \infty$, so ist

$$|f|^q \in L^r, \qquad r = p/q > 1.$$

Mit dem zu r konjugierten Exponenten s und Hölder folgt

$$\int_E |f|^q \leqslant \left(\int_E |f|^{qr}\right)^{1/r} \left(\int_E 1^s\right)^{1/s} = \mu(E)^{1/s} \|f\|_p^q < \infty.$$

Somit ist $f \in L^q$ mit

$$\|f\|_q \leqslant \mu(E)^{1/sq} \|f\|_p.$$

Mit $1/sq = 1/q - 1/p$ folgt die behauptete Ungleichung. Für $p = \infty$ gilt analog

$$\int_E |f|^q \leqslant \|f\|_\infty^q \int_E 1 \leqslant \mu(E) \|f\|_\infty^q < \infty.$$

Also ist wieder $f \in L^q$ mit

$$\|f\|_q \leqslant \mu(E)^{1/q} \|f\|_\infty,$$

was die Behauptung ergibt.

Um die Dichtheit der Einbettung zu zeigen, betrachte man zu $f \in L^q$ die oben bei n und unten bei $-n$ abgeschnittenen Funktionen

$$f_n \coloneqq \max(\min(f, n), -n).$$

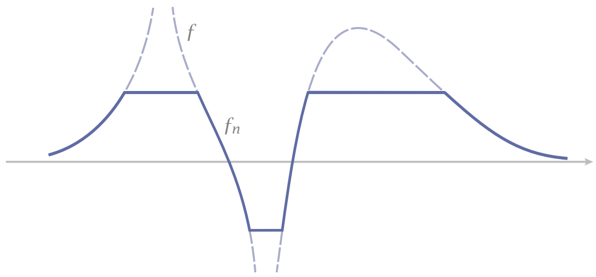
Dann ist $f_n \in L^p$ für alle n und $p \geqslant q$ sowie

$$|f - f_n| \leqslant |f|, \qquad f - f_n \to_\mu 0.$$

Aufgrund der dominierten Konvergenz 20.28 gilt also $\|f - f_n\|_q \to 0$. Somit ist $L^p(E) \xhookrightarrow{d} L^q(E)$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Abb 2

Die abgeschnittene Funktion f_n



Wir erwähnen noch, dass C^∞-Funktionen dicht in den L^p-Räumen liegen. Sei dazu $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ der Raum aller C^∞-Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit kompaktem Träger.

13 **Satz** *Für* $1 \leqslant p < \infty$ *gilt*

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \overset{d}{\hookrightarrow} L^p(\mathbb{R}^n). \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨ Zu jedem $f \in L^p$ und $\varepsilon > 0$ existiert [17] eine Treppenfunktion s mit

$$\|f - s\|_p < \varepsilon.$$

Jede Treppenfunktion ist eine endliche Linearkombination aus charakteristischen Funktionen von disjunkten Intervallen. Es genügt daher, für jedes Intervall I und jedes $\varepsilon > 0$ eine stetige respektive glatte Funktion φ mit kompaktem Träger zu finden, so dass

$$\|\chi_I - \varphi\|_p < \varepsilon.$$

Das ist aber leicht zu bewerkstelligen – entweder ›von Hand‹ wie in Abbildung 5 oder mithilfe einer Faltung [28]. ⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Dieser Satz erlaubt folgende Interpretation. Auf $C_c(\mathbb{R}^n)$ definiert $\|\cdot\|_p$ eine *Norm*, denn für *stetige* Funktionen mit *kompaktem* Träger gilt

$$\|f\|_p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \equiv 0, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Damit ist $C_c(\mathbb{R}^n)$ aber nicht vollständig. Aufgrund des letzten Satzes ist aber $C_c(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leqslant p < \infty$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Wir können daher $L^p(\mathbb{R}^n)$ als *Vervollständigung* von $C_c(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_p$ auffassen. ⊸

Abb 3

Approximation von χ_I durch C_c^∞-Funktion