

3. Vorlesung

27.10.2021

Schalte

$$\omega = f(x)$$

$$x \in \mathbb{R}^{n+m}$$

$$\omega \in \mathbb{R}^n$$

Linearisierung um x_0 :

$$\omega = \omega_0 + Df(x_0)(x - x_0)$$

$$\omega_0 = f(x_0)$$

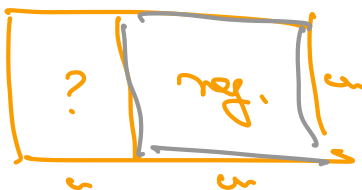
woher

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n+m}$$



□ Geht in einen Rang, also = n.

Spalte unvarian:



Notation:

$\mathbb{R}^{n+m}$

$$x = (x_1, \dots, x_{n+m})$$

$$= (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m)$$

$$= (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

Druck

$$\omega = \omega_0 + B(u - u_0) + A(v - v_0)$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} B & A \end{pmatrix}$$

Für A Regel: sufficient und v:

$$v = v_0 + f^{-1}(\omega - \omega_0) - f^{-1} B(u - u_0)$$

fr. u für (z.B. $\omega = \omega_0$)

"funkt"

$$f(x) = f(u, v) = \omega$$

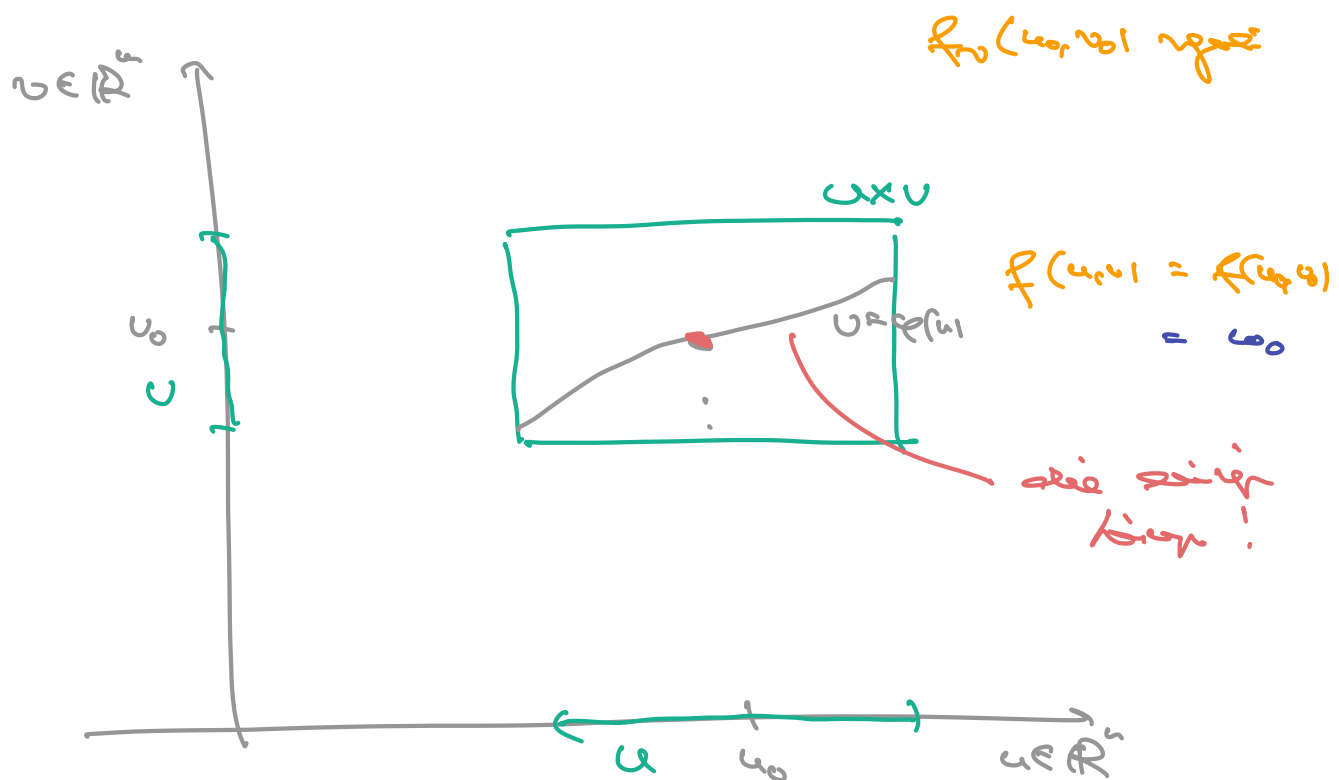
$$x = (u, v) \\ = (u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_m)$$

$$f_v = \left(\frac{\partial f}{\partial v_r} \right)_{1 \leq r \leq m, 1 \leq r \leq m} \text{ Regel}$$

$$f_u = \left(\frac{\partial f}{\partial u_r} \right)_{1 \leq r \leq m, 1 \leq r \leq m}$$

Dr:

$$Df = (f_u | f_v) = \begin{pmatrix} B & A \end{pmatrix}$$



$$\varphi: u \rightarrow v \quad : \quad f(u, \varphi(u)) = w_0$$

then:

$$f(u, v) = w_0 = f(u_0, v_0)$$

find a set of u and v

uniquely such v exists:

$$v = \varphi(u) \quad : \quad f(u, \varphi(u)) = w_0, \quad u \in U.$$

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

$$F(u, v) = (u, f(u, v))$$

gibt Diff, ,

$$F(u_0, v_0) = (u_0, w_0).$$

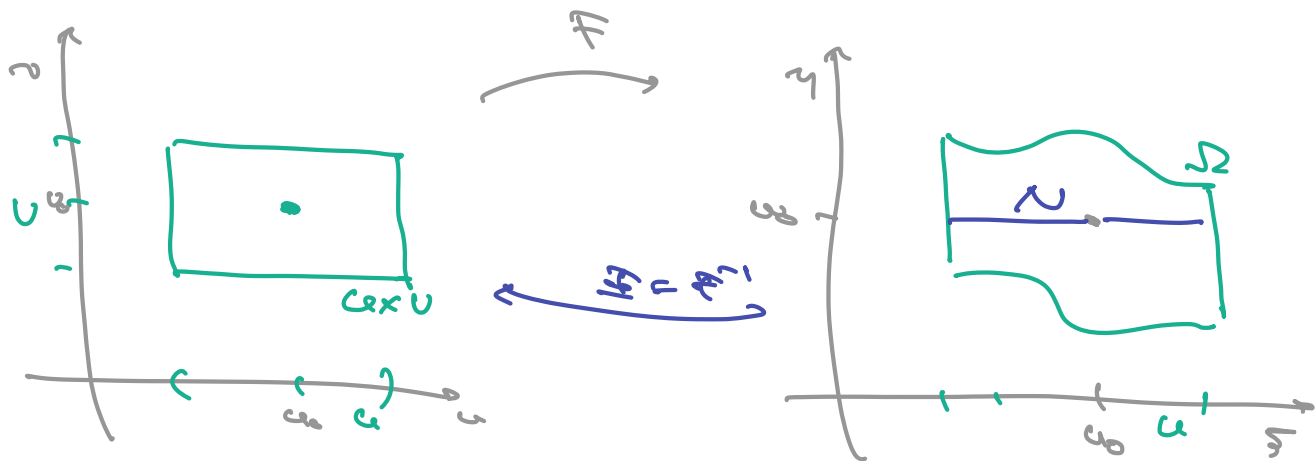
Fraktion:

$$DF = \begin{pmatrix} \boxed{I} & 0 \\ f_u & \boxed{f_v} \end{pmatrix}$$

$$\text{set } \underline{DF}(u_0, v_0) = \text{set } f_v(u_0, v_0) \neq 0!$$

für Constraints: F ist Diff
um (u_0, v_0) .

$$F : u \times v \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ni (u_0, w_0).$$



Umkehrabb. :

$$H : \Omega \rightarrow C \times U$$

$$H(\xi, \eta) = (C, \varphi(\xi, \eta))$$

Anforderung: $\forall C$ existiert Ω ,

$$N := C \times \text{haus} \subset \Omega$$

Gesamt:

$$f(u, v) = \omega_0$$

in $U \times V$:

Es:

$$K = \{ (u, v) \in U \times V : f(u, v) = \omega_0 \}$$

Bild nach f :

$$\begin{aligned} f(K) &= \{ (z, \eta) \in \Omega : \eta = \omega_0 \} \\ &= U \times \{ \omega_0 \} \\ &= N \end{aligned}$$

Es f umkehrbar: $\mathbb{H} = \mathbb{H}'$:

$$\begin{aligned} K &= \mathbb{H}(N) \\ &= \{ (z, \varphi(z, \omega_0)) : (z, \omega_0) \in N \} \\ &= \{ (u, \varphi(u, \omega_0)) : u \in U \} \\ &= \Gamma(\varphi_0), \quad \varphi_0 = \varphi(\cdot, \omega_0). \end{aligned}$$

Es ist die gesuchte Funktion

$$\varphi_0 : U \rightarrow V, \quad u \mapsto v = \varphi(u, \omega_0)$$

↑
 φ in Satz.

□

Beweis: Dies ist ja

$$f(u, \varphi(u)) = c_0 = 1$$

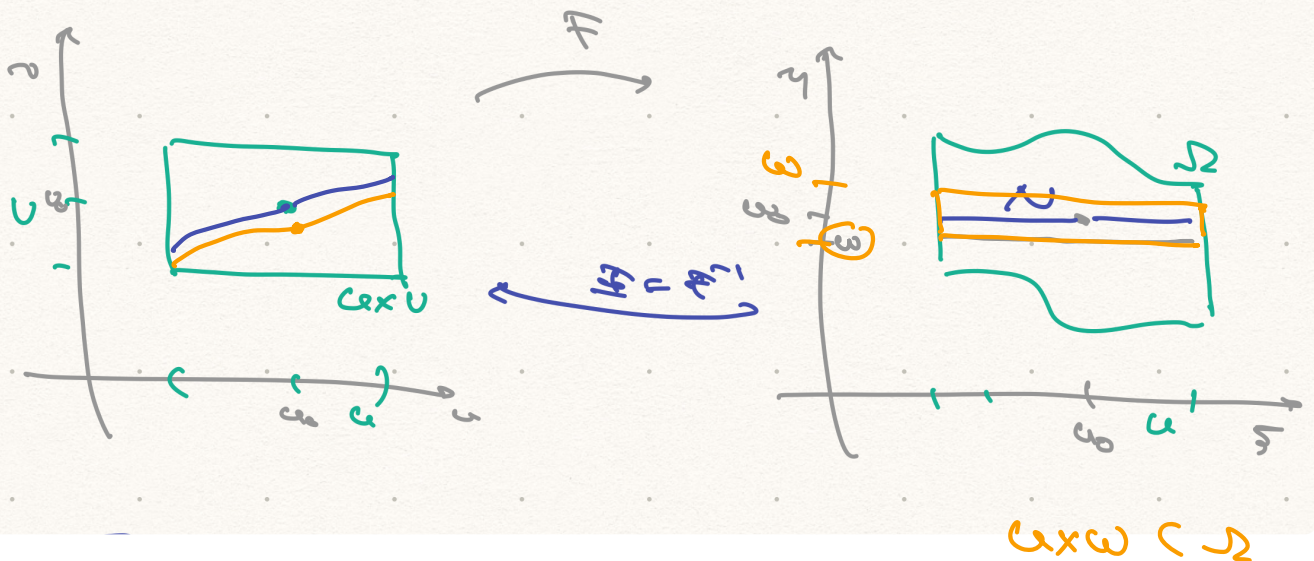
$\uparrow$ $\uparrow$
 u $\varphi(u)$

Komponente:

$$0 = D(f(u, \varphi(u)))$$

$$= f_u + f_v \varphi_u$$

$$\Rightarrow f_u = -f_v^{-1} f_v \Big|_{(u, \varphi(u))} \quad \square$$



(2)

$$f_y(x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{also möglich.}$$

$$\text{Dann kann man } f(x, y) = c$$

und y auflösen:

Ergebnisse ist Graph einer Funktion

$$y : y = g(x) :$$

$$f'(c) = \{ (x, y) : y = g(x) \}$$

$$\text{Auch für } f_x(x_0, y_0) \neq 0 : \dots$$

und x auflösen:

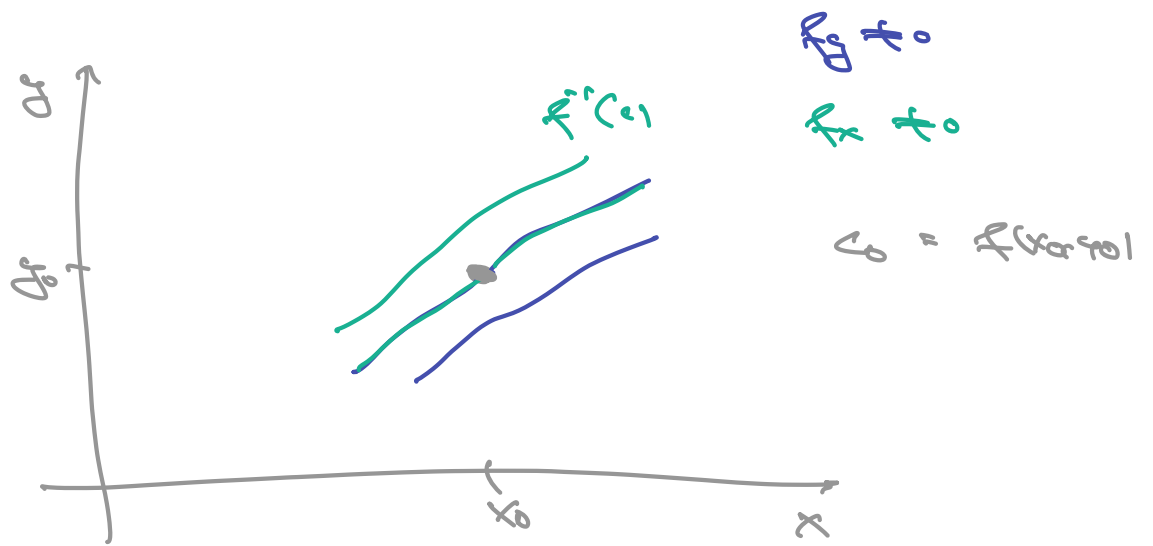
$$x : x = \alpha(y) ,$$

Sei das Beispiel erfüllt:

$$g'(x_0) = - \frac{f_x}{f_y} \Big|_{(x_0, y_0)} \neq 0$$

$$\alpha'(y_0) = - \frac{f_y}{f_x} \Big|_{(x_0, y_0)} \neq 0$$

}



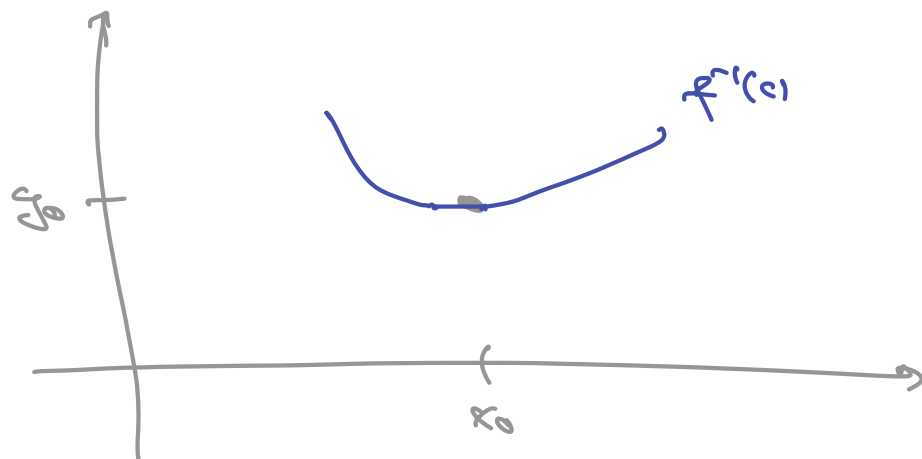
Gift x_0, y_0

$$f_g(x_0, y_0) \neq 0,$$

$$f_x(x_0, y_0) = 0;$$



$$g'(x_0) = 0 \quad \underline{\text{Lagrange}}$$



Dan:

$$\bigcup R(p) \neq \emptyset$$

~ verifikasi ini $f_{x_j}(p) \neq 0$
 f_{x_i} ini $(\exists j \in u,$

di mana $x_j = v$, dan pada saat ini $v \in u$?

$$f = f(u, v), \quad f_0(u, v) \neq 0$$

(FT: total ada $(u_0, v_0) = A$:

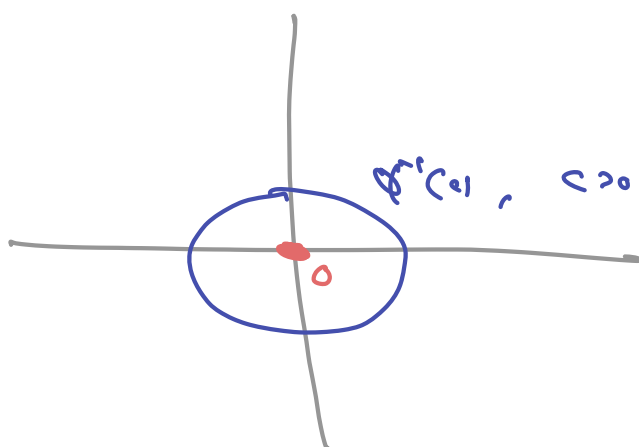
$$v = \varphi(u)$$

1. $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(x, y) = x^2 + y^2,$$

$$\bigcup \phi(c) = \emptyset.$$

$$\phi^{-1}(c) = \begin{cases} \text{Kiri} & , & c > 0 \\ \text{Kanan} & , & c = 0 \\ \emptyset & , & c < 0 \end{cases}$$



2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

$$\nabla f(0) = 0.$$

