18.2 Implizite Funktionen

Der Umkehrsatz [1] sagt aus, dass eine stetig differenzierbare Abbildung

$$f: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n, \quad w = f(x)$$

lokal um $f(x_0) = w_0$ eine stetig differenzierbare Umkehrabbildung genau dann besitzt, wenn $\det Df(x_0) \neq 0$. In diesem Fall werden die n Koordinaten von x durch die n Gleichungen

$$w_i = f_i(x_1, .., x_n), \qquad i = 1, .., n,$$

lokal eindeutig und in stetig differenzierbarer Weise als Funktionen von w in der Nähe von w_0 bestimmt. Daher sagt man auch ›*n Gleichungen bestimmen im Allgemeinen eindeutig n Unbekannte*‹.

Nun betrachten wir in gleicher Weise eine Abbildung

$$f: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m, \quad w = f(x)$$

mit $m \neq n$. Ist $n < m$, so handelt es sich um ein *überbestimmtes System*, das nicht für alle w in der Nähe von w_0 gelöst werden kann, wenn überhaupt. Dies ist bereits bei linearen Gleichungen offensichtlich. Diesen Fall werden wir daher nicht weiter betrachten.

Bleibt der Fall $n > m$. Da die Anzahl der Gleichungen kleiner ist als die Anzahl der Koordinaten, spricht man von einem *unterbestimmten System*. Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir die Dimension des Urbildraumes als $n + m$ mit $m \geqslant 1$ und $n \geqslant 1$, und betrachten eine Abbildung

$$f: \mathbb{R}^{n+m} \hookrightarrow \mathbb{R}^m, \quad w = f(x).$$

Die Vermutung liegt nahe, dass hier durch m Gleichungen auch nur m Koordinaten von x bestimmt werden, während n Koordinaten frei gewählt werden können. Somit sind keine eindeutigen Lösungen zu erwarten, sondern *Familien* von Lösungen, die von n Parametern abhängen.

Wir betrachten wieder die Linearisierung des Problems lokal um $w_0 = f(x_0)$. Statt $w = f(x)$ betrachten wir also

$$w = w_0 + Df(x_0)(x - x_0), \tag{1}$$

wobei die Jocobische

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_l}(x_0) \right)_{1 \leqslant k \leqslant m, 1 \leqslant l \leqslant n+m}$$

durch eine $m \times (n + m)$-Matrix dargestellt wird. Diese ist natürlich nicht invertierbar. Hat sie aber *maximalen Rang m*, so gibt es eine Umordnung der Spalten von $Df(x_0)$ derart, dass die hintere $m \times m$-Untermatrix

$$A = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_l}(x_0)\right)_{1 \leqslant k \leqslant m, n+1 \leqslant l \leqslant n+m}$$

maximalen Rang m hat und somit invertierbar ist. Nummerieren wir die Koordinaten entsprechend dieser Umordnung um und schreiben

$$x = (x_1, .., x_n, x_{n+1}, .., x_{n+m}) = (u_1, .., u_n, v_1, .., v_m) = (u, v),$$

so geht Gleichung (1) über in

$$w = w_0 + B(u - u_0) + A(v - v_0), \tag{2}$$

wobei die Matrix B aus den ersten n Spalten von $Df(x_0)$ besteht. Da A regulär sein soll, können wir diese Gleichung nach v auflösen und erhalten

$$v = v_0 + A^{-1}(w - w_0) - A^{-1}B(u - u_0).$$

Für jedes feste w ist die Lösungsmenge von (2) somit ein n-dimensionaler affiner Unterraum, wo die n Koordinaten u eindeutig die übrigen m Koordinaten v bestimmen.

Soweit das linearisierte Problem. Der Satz über implizite Funktionen sagt nun aus, dass *lokal* dasselbe auch für das nichtlineare Problem gilt.

Um die Formulierung dieses Satzes zu vereinfachen, gehen wir davon aus, dass wir die Koordinaten bereits so nummeriert haben, dass die hintere quadratische Untermatrix von $Df(x_0)$ maximalen Rang hat, und bezeichnen diese Koordinaten wie zuvor mit (u, v). Dementsprechend sei

$$f_u = \left(\frac{\partial f_k}{\partial u_l}\right)_{1 \leqslant k \leqslant m, 1 \leqslant l \leqslant n}, \qquad f_v = \left(\frac{\partial f_k}{\partial v_l}\right)_{1 \leqslant k, l \leqslant m}.$$

Mit den obigen Bezeichnungen ist also $Df = (f_u \mid f_v) = (B \mid A)$.

9 **Satz über implizite Funktionen (IFS)** *Sei*

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^m, \quad w = f(u, v)$$

stetig differenzierbar und $w_0 = f(u_0, v_0)$. *Ist*

$$\det f_v(u_0, v_0) \neq 0,$$

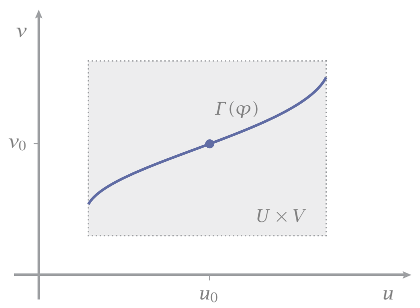
so existieren eine Umgebung $U \times V$ *von* (u_0, v_0) *sowie eine stetig differenzierbare Abbildung*

$$\varphi : U \to V, \quad u \mapsto v = \varphi(u),$$

so dass

$$\{(u, v) \in U \times V : f(u, v) = w_0\} = \{(u, \varphi(u)) : u \in U\} = \Gamma(\varphi). \quad \rtimes$$

Abb 6 Satz über implizite Funktionen



Innerhalb des ›Fensters‹ $U \times V$ um (u_0, v_0) sind die einzigen Lösungen der Gleichung $f(u, v) = w_0$ also genau diejenigen, die auf dem Graphen $\Gamma(\varphi)$ von φ liegen. *Andere Lösungen gibt es in $U \times V$ nicht.* Insbesondere ist $\varphi(u_0) = v_0$. In diesem Sinne wird die implizite Gleichung $f(u, v) = w_0$ lokal eindeutig nach v aufgelöst durch die stetig differenzierbare Funktion $v = \varphi(u)$.

Diese Funktion φ lässt sich allerdings nur in den wenigsten Fällen explizit angeben. Es handelt sich eben um eine nur *implizit* durch f definierte Funktion. Wir wissen aber immerhin, dass $f(u, \varphi(u))$ konstant ist, wodurch wir praktisch ebenso viel über φ erfahren können wie durch eine explizite Formel.

⟪⟪ *Beweis des Satzes* Wir erhalten diesen Satz aus dem Umkehrsatz $_1$, indem wir die Abbildung f geeignet erweitern. Wir definieren dazu in einer Umgebung von (u_0, v_0) die Abbildung

$$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad F(u, v) = (u, f(u, v)).$$

Diese ist ebenfalls stetig differenzierbar, und es ist

$$F(u_0, v_0) = (u_0, f(u_0, v_0)) = (u_0, w_0).$$

Die Jacobimatrix von F ist

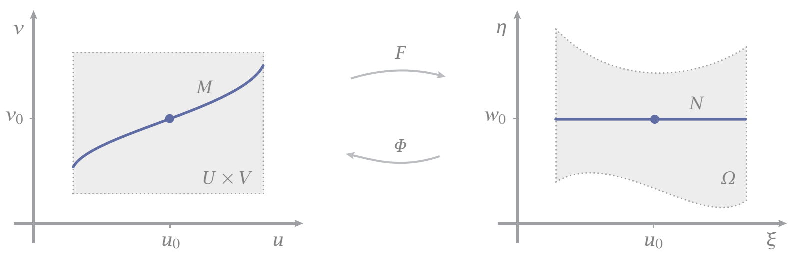
$$DF = \begin{pmatrix} I & 0 \\ f_u & f_v \end{pmatrix},$$

denn die erste Komponente von F ist die Identität in u. Aufgrund der Rechenregeln für Determinanten ist daher

$$\det DF(u_0, v_0) = \det f_v(u_0, v_0) \neq 0.$$

Also ist der Umkehrsatz $_1$ anwendbar und F ein lokaler Diffeomorphismus.

Abb 7 Erweiterte Abbildung F und ihre Umkehrabbildung Φ



Es gibt also eine offene Umgebung $U \times V$ von (u_0, v_0), die von F diffeomorph auf eine Umgebung Ω von (u_0, w_0) abgebildet wird. Da F in der ersten Komponente die Identität ist, hat die Menge Ω die in Abbildung 7 skizzierte vertikal gescherte Gestalt, und die Umkehrabbildung ist von der Form

$$\Phi : \ \Omega \to U \times V, \quad \Phi(\xi, \eta) = (\xi, \varphi(\xi, \eta)).$$

Aus Stetigkeitsgründen können wir U auch noch so klein wählen, dass der horizontale Schnitt

$$N \coloneqq U \times \{w_0\}$$

ganz in Ω enthalten ist.

Betrachte nun die Menge M aller Lösungen der Gleichung $f(u, v) = w_0$ im Fenster $U \times V$, also

$$M = \{(u, v) \in U \times V : f(u, v) = w_0\}.$$

Deren Bild unter F ist die Menge

$$F(M) = \{(\xi, \eta) \in \Omega : \eta = w_0\} = U \times \{w_0\} = N.$$

Da F umkehrbar ist mit Umkehrabbildung Φ, folgt hieraus

$$\begin{aligned} M &= \Phi(N) \\ &= \{(\xi, \varphi(\xi, w_0)) : (\xi, w_0) \in \Omega\} \\ &= \{(u, \varphi(u, w_0)) : u \in U\} \\ &= \Gamma(\varphi_0) \end{aligned}$$

mit

$$\varphi_0 : \ U \to V, \quad u \mapsto v = \varphi(u, w_0).$$

Dies ist die im Satz mit φ bezeichnete gesuchte Abbildung. ⟫⟫⟫

18.18

10 **Zusatz** *Für die Ableitung der impliziten Funktion φ gilt*

$$\varphi_u(u) = -f_v^{-1} f_u \Big|_{(u,\varphi(u))}.$$

Ist außerdem f von der Klasse C^r mit $1 \leqslant r \leqslant \infty$, so gilt dies auch für φ. ⋊

⟪⟪⟪ Für $u \in U$ gilt ja $f(u,\varphi(u)) = w_0$. Da f und φ stetig differenzierbar sind, können wir die Kettenregel 14.7 anwenden und erhalten

$$0 = D(f(u,\varphi(u))) = f_u + f_v \varphi_u,$$

wobei f_u und f_v an der Stelle $(u,\varphi(u))$ ausgewertet werden. Da im vorangehenden Beweis F als Diffeomorphismus von $U \times V$ nach Ω konstruiert wurde, ist $\det f_v \neq 0$ für alle $u \in U$. Wir können daher die letzte Gleichung nach φ_u auflösen und erhalten die Behauptung. Die Regularitätsaussage folgt unmittelbar aus dem entsprechenden Ergebnis für den Umkehrsatz 8. ⟫⟫⟫

Tatsächlich haben wir im vorangehenden Beweis eine stärkere Aussage bewiesen. Die Menge $M = \{(u,v) \in U \times V : f(u,v) = w_0\}$ können wir ebensogut für alle w in einer hinreichend kleinen Umgebung von w_0 betrachten. Dazu müssen wir nur φ als Funktion von u wie auch w betrachten. Dies führt zu folgendem Satz.

11 **Erweiterter Satz über implizite Funktionen (Ifs)** *Sei*

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^m, \quad w = f(u,v)$$

stetig differenzierbar und $w_0 = f(u_0,v_0)$. Gilt $\det f_v(u_0,v_0) \neq 0$, so existieren Umgebungen $U \times V$ von (u_0,v_0) und W von w_0 sowie eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\Phi : U \times W \to V, \quad v = \Phi(u,w),$$

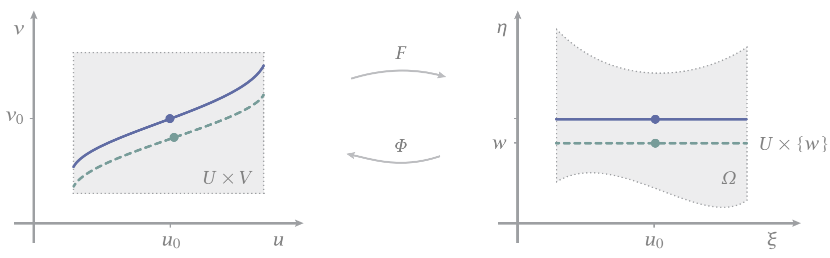
so dass für jedes $w \in W$

$$\{(u,v) \in U \times V : f(u,v) = w\} = \{(u,\Phi(u,w)) : u \in U\}.$$

Ist außerdem f von der Klasse C^r mit $1 \leqslant r \leqslant \infty$, so gilt dies auch für Φ. ⋊

In dem Fenster $U \times V$ ist also nicht nur die Menge $\{f = w_0\}$ der Graph einer Abbildung. Dasselbe gilt auch für jede Menge $\{f = w\}$ mit w in einer hinreichend kleinen Umgebung von w_0, und die Abhängigkeit von w ist ebenso regulär wie die Abbildung f. Alle diese Mengen werden durch die Abbildung Φ beschrieben.

Abb 8 Zum allgemeinen Satz über implizite Funktionen



⟨⟨⟨⟨⟨ Im vorangehenden Beweis wählen wir die Umgebung U noch so klein, dass Ω ein Rechteck $U \times W$ mit einer Umgebung W von w_0 enthält. Dann können wir überall im Beweis w_0 durch $w \in W$ ersetzen und erhalten damit die implizite Lösungsfunktion

$$\Phi: \ U \times W \to V, \quad (u, w) \mapsto v = \Phi(u, w).$$

Alles Weitere ist dann klar. ⟩⟩⟩⟩⟩

■ Skalare Funktionen

Als erste Anwendung des Satzes über implizite Funktionen betrachten wir skalare Funktionen. Sei zunächst

$$f: \ \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

eine Funktion zweier Variablen, (x_0, y_0) ein Punkt im Definitionsbereich von f und $c_0 = f(x_0, y_0)$ sein Bildpunkt. Wir wollen wissen, wie die *Niveaumengen*

$$f^{-1}(c) = \{(x, y) : f(x, y) = c\}$$

für c in der Nähe von c_0 lokal um (x_0, y_0) aussehen.

Ist

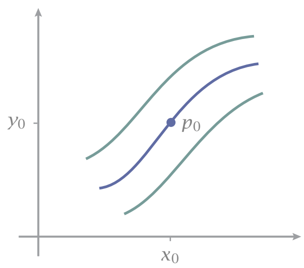
$$f_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

so können wir die Gleichung $c = f(x, y)$ lokal nach y auflösen und jede Niveaumenge als Graph einer Funktion $g\colon y = g(x)$ darstellen. Ist

$$f_x(x_0, y_0) \neq 0,$$

so können wir diese Gleichung lokal nach x auflösen und jede Niveaumenge als Graph einer Funktion $h\colon x = h(y)$ darstellen. Sind beide Bedingungen erfüllt, so

Abb 9 Niveaulinien im Fall $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ und $f_x(x_0, y_0) \neq 0$



sind beide Darstellungen möglich. Außerdem gilt dann

$$g'(x_0) = -\left.\frac{f_x}{f_y}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0, \qquad h'(y_0) = -\left.\frac{f_y}{f_x}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0.$$

Das lokale Bild entspricht somit qualitativ dem in Abbildung 9.

Gilt dagegen

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \qquad f_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

so ist auch $g'(x_0) = 0$. Die Niveaulinie durch p_0 hat somit einen *Flachpunkt* und sieht im Allgemeinen wie in Abbildung 10 links aus. Entsprechendes gilt, wenn die Rollen von x und y vertauscht sind.

Der nächste Satz überträgt diese Betrachtungen auf Funktionen $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$.

Satz *Sei* $f : \mathbb{R}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar mit* $n \geqslant 1$ *und*

$$\nabla f(p_0) \neq 0.$$

Dann ist lokal um p_0 *jede Niveaumenge* $f^{-1}(c)$ *mit* c *in einer hinreichend kleinen Umgebung von* $c_0 = f(p_0)$ *darstellbar als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion* $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$. ⋊

Abb 10 Niveaulinien im Fall $f_x(x_0, y_0) = 0$ respektive $f_y(x_0, y_0) = 0$

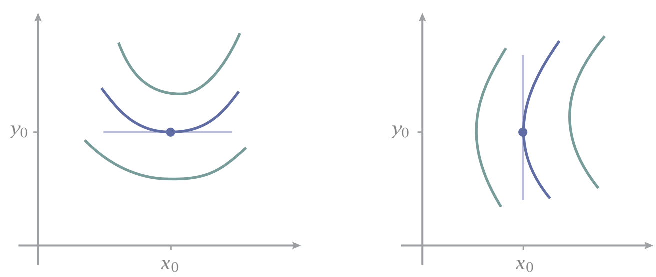
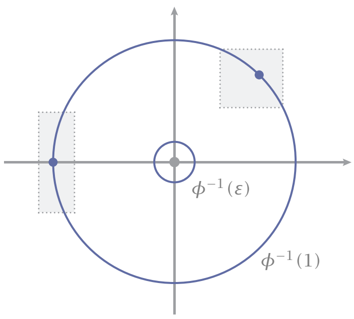


Abb 11 Niveaulinien von $x^2 + y^2$ mit zwei regulären Punkten



⟨⟨⟨⟨⟨ Wegen $\nabla f(p_0) \neq 0$ ist mindestens eine partielle Ableitung von f nicht Null. Nennen wir diese Koordinate v und die restlichen n Koordinaten u, so ist der Ifs anwendbar, und lokal auf jeder Niveaufläche die Koordinate v als Funktion der Koordinaten u darstellbar. ⟩⟩⟩⟩⟩

Lokal um einen Punkt p_0 mit

$$\nabla f(p_0) = 0$$

gelten solche Aussagen im Allgemeinen *nicht*. Dies zeigen die folgenden beiden Beispiele.

A. Betrachte

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \phi(x, y) = x^2 + y^2.$$

Der Gradient von φ verschwindet im Nullpunkt und sonst nicht. Die Niveaumengen dieser Funktion sind

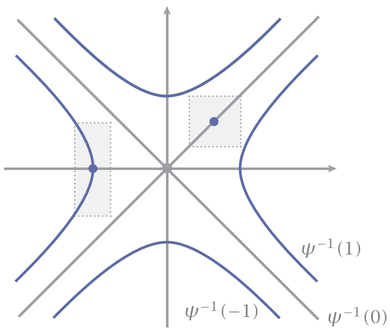
$$\phi^{-1}(c) = \begin{cases} \text{Kreislinie}, & c > 0, \\ \text{Nullpunkt}, & c = 0, \\ \text{leere Menge}, & c < 0. \end{cases}$$

Also sind in keiner Umgebung von 0 die Niveaumengen von ϕ als Graphen einer Funktion auf einem offenen Intervall darstellbar. In jedem anderen Punkt ist dies möglich: auf den beiden Koordinatenachsen gibt es jeweils eine Möglichkeit, innerhalb der vier offenen Quadranten deren zwei.

B. Dasselbe gilt für

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \psi(x, y) = x^2 - y^2.$$

Abb 12 Niveaulinien von $x^2 - y^2$ mit zwei regulären Punkten



Die Niveaumengen dieser Funktion sind

$$\psi^{-1}(c) = \begin{cases} \text{zwei Hyperbelbögen durch } x\text{-Achse}, & c > 0, \\ \text{beide Winkelhalbierende}, & c = 0, \\ \text{zwei Hyperbelbögen durch } y\text{-Achse}, & c < 0. \end{cases}$$

c. Die klassische newtonsche Bewegungsgleichung eines reibungsfreien Teilchens der Masse 1 auf der reellen Achse unter dem Einfluss eines Potentials $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist

$$\ddot{x} = -V'(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Als System erster Ordnung lauten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -V'(x). \end{aligned}$$

Die *Gesamtenergie* dieses System ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie,

$$E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad E(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x).$$

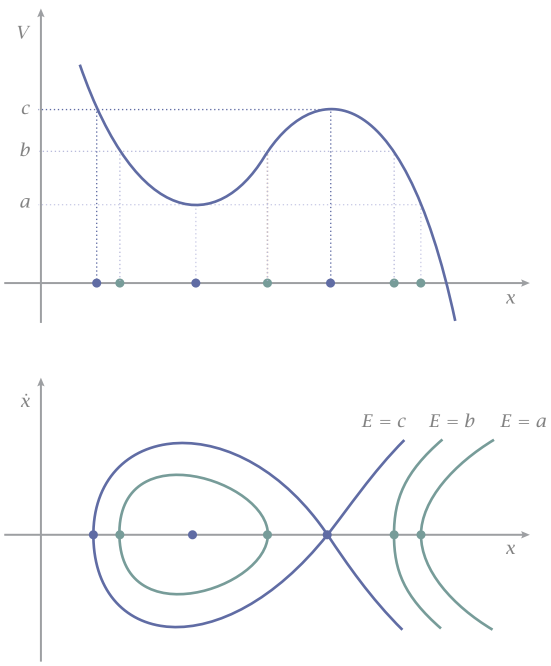
Diese ist konstant entlang jeder Lösung, denn

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(x, \dot{x}) = E_x \dot{x} + E_{\dot{x}} \ddot{x} = V'(x)\dot{x} - \dot{x}V'(x) = 0.$$

Das ist der klassische *Energieerhaltungssatz*. Jede Lösungskurve ist somit in einer Niveaumenge der Energiefunktion enthalten, und die Niveaumengen liefern bereits Aufschlüsse über die Lösungen der Differenzialgleichung $\ddot{x} = -V'(x)$.

18.23

Abb 13 Ein Potential V und sein Phasenportrait



Betrachte also die Niveaumengen von E. Wegen $\nabla E = (V'(x), \dot{x})^\top$ liegen kritische Punkte genau dann vor, wenn

$$V'(x) = 0 \wedge \dot{x} = 0.$$

Diese entsprechen kritischen Punkten des Potentials V auf der x-Achse. Alle anderen Punkte sind regulär, und die zugehörigen Niveaulinien sind reguläre, stetig differenzierbare Kurven. Wegen $E(x, -y) = E(x, y)$ verlaufen diese symmetrisch zur x-Achse und schneiden die x-Achse immer senkrecht, da

$$E_{\dot{x}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x} = 0,$$

während an diesen Stellen $V'(x) \neq 0$. Mit diesen Überlegungen lässt sich bereits das sogenannte *Phasenportrait* zur Gleichung $\ddot{x} = -V'(x)$ vollständig beschreiben. ◁