4. Vorlesung 28.10.2021

Bem.: 1. Erklärt alle vorangegangenen Def.

2. $\operatorname{rang} Df(p) \leq \min\{n, m\}$

Falls $n < m$, dann $Df(p)$ nicht surjektiv. Also kein 'regulärer Punkt'.

„überbestimmtes System“.

3. Kurve $\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, kein regulärer Punkt im Sinne dieser Def. Beachte!

Niveaumengen:

$$f^{-1}(c) = \{x : f(x) = c\}$$

Speziell:

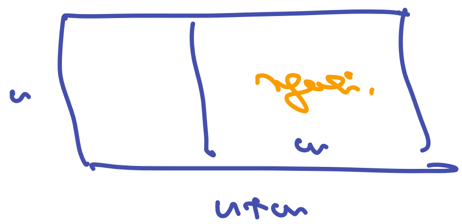
$$f^{-1}(f(p)) = \{x : f(x) = f(p)\}$$

Beweis: Sei p ein Def.

$\operatorname{rang} Df(p) = m$ (maximal).

Dann gesichert Umordnung der Koord.:

Ist letzten m Spalten von $Df(p)$ l.u. gilt:



Dann (FS) anwenden:

Umgebung $X = Q \times U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ von p

Umgebung $W \subset \mathbb{R}^m$ von $f(p)$

und C^∞-Abb

$$\Phi : Q \times W \longrightarrow U,$$

so dass:

$$\underbrace{f^{-1}(w) \cap X}_{} = \{(u,v) \in X : f(u,v) = w\}$$

$$= \{(u,v) \in X : v = \Phi(u,w),\ u \in Q\}$$

$$= \underbrace{\Gamma(\Phi(\cdot, w))}_{\text{Graph.}}.$$

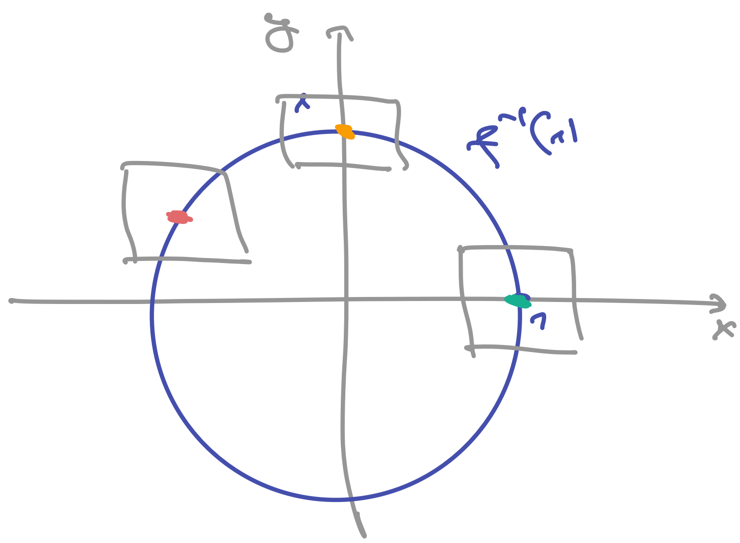
Bsp.: $\quad f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\nabla f = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff (x,y) = 0$$

Also jeder Punkt $(x,y) \neq 0$ ist ein regulärer Punkt von f.

Insbesondere: Jeder Punkt in $f^{-1}(r)$ ist ein regulärer Punkt von f.



F flacht M ab.

Bew: Sei $M = f^{-1}(0)$

$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$

Sei $p \in M$. Dann $Df(p)$ Rang m.

Also Koordinaten:

$$Df(p) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} \dots & \underbrace{\text{regulär}}_{m} \end{array}\right] \end{array} \; m$$

Damit

$$F : \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ f(u,v) \end{pmatrix}$$

Bew.:

$$\det DF(p) = \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ f_u & f_v \end{pmatrix}$$

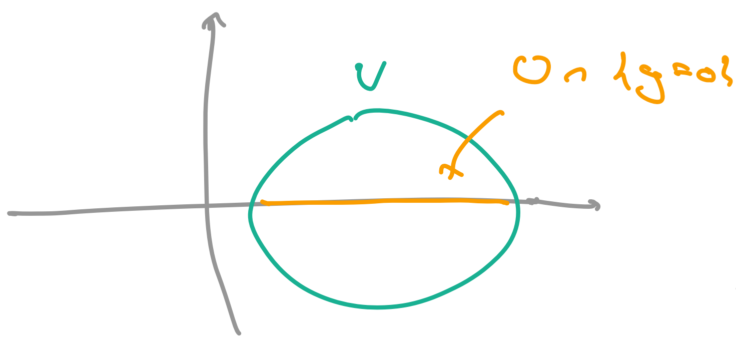
$$= \det(f_v(p)) \neq 0.$$

Also: F ist bei p lokaler Diffeo:

$$F : (W, p) \overset{C^k}{\longrightarrow} (U, F(p)) = (U, 0)$$

Für diesen gilt:

$$F(M \cap W) = F(f^{-1}(0) \cap W) = U \cap \{y = 0\}.$$



Bsp: 1.

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$$

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{0\}^m \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

ist Umf. der Dim n und Klasse C^∞.

2.

$$A : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

sei linear und surjektiv.

Dann $\operatorname{Ker} A = A^{-1}(0)$

eine Umf der Dim n, Klasse C^∞.

3.

$$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$= x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$

$$= \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|_2^2 = 1\}$$

ist Umf der Dim n, Klasse C^∞.

Für $n=0$:

$$S^0 = \{-1, 1\}.$$

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zeige:

$f'(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$

Dann $f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$

[illegible] [illegible] [illegible] G_f, [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible].

5. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$u \longmapsto v = \varphi(u)$

Graph:

$\Gamma(\varphi) = \{ (u, \varphi(u)) : u \in \mathrm{Def}(\varphi) \}$

$\subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

ist [illegible] G_φ :

Dem: Sei $\varphi : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$

Dem:

$\Omega = D \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n,$

$$f(u,v) = v - \varphi(u).$$

Then

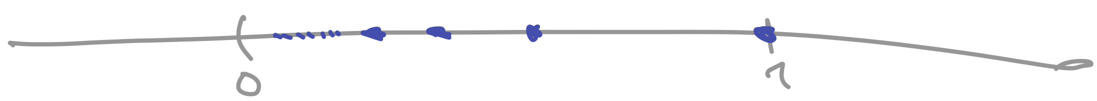
$f_0 = I$ regular

and

$$\Gamma(\varphi) = \{ (u,v) \in \Omega : v = \varphi(u) \}$$
$$= \{ (u,v) \in \Omega : f(u,v) = 0 \}$$
$$= f^{-1}(0).$$

6.

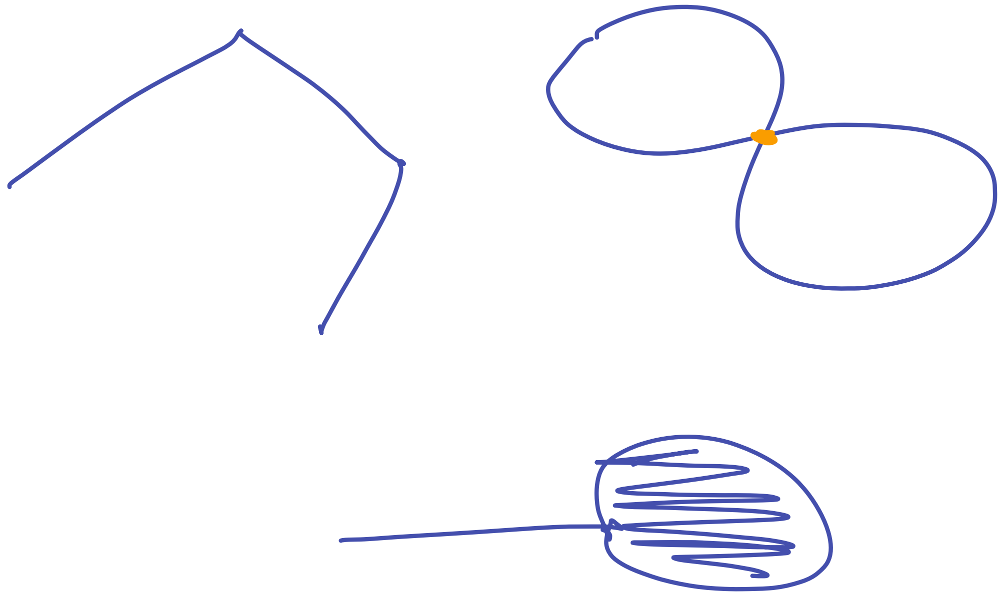
$$A = \{ \tfrac{1}{n} : n \geq 1 \}$$



Lef $\neq$ Dim 0.
2

Rk: $A \cup \{0\}$ est fermé Lef. !

7. Keine Mf:



Hyperboloid und Kegel:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$$

Niveaumenge:

$$M_c = f^{-1}(c) = \{ (x,y,z) : x^2+y^2-z^2 = c \}$$

$$\nabla f = 0 \iff (x,y,z) = 0$$

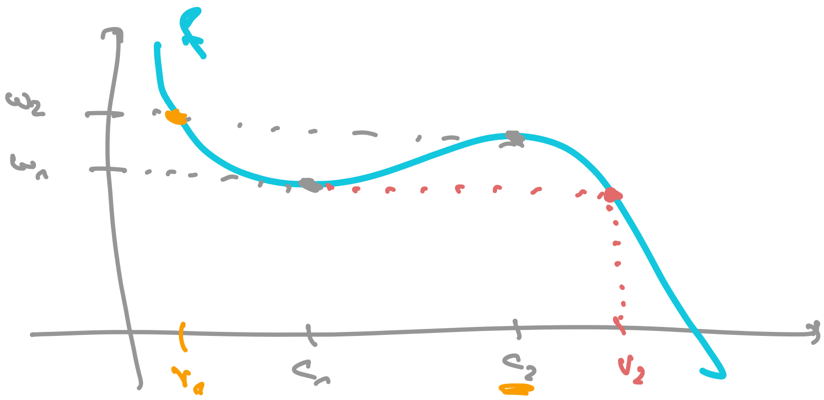
Jeder andere Punkt ist ein regulärer Punkt von f.

Also: M_c, $c \neq 0$, ist Mf.

Bem. 1. reguläre <u>Punkte</u> im Def.bereich,

reguläre <u>Werte</u> im Bildbereich,

2. Die Werte einer regulären Funktion müssen keine regulären Werte sein!



3. Ist 0 ein regulärer Wert, begründe anhand von Def. Beweis ab!

$$f : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$$

0 kein regulärer Wert:

$$f^{-1}(0) \ni 0, \quad Df(0) = 0.$$

Auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist jeder Wert von f ein regulärer Wert:

$f^{-1}(0)$ „doppelter Kegel“.

__Beweis:__ Sei $M = f^{-1}(0)$ eine Mf im Sinne der Def. Dann jeder Punkt in $f^{-1}(0)$ ein regulärer Punkt. Also ist 0 regulärer Wert von $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$.

__Umgekehrt:__ Sei 0 regulärer Wert von f.

Betrachte $p \in M = f^{-1}(0)$.

Dann p regulärer Punkt, also

$$Df(p) \text{ ist surjektiv}$$

Es ex. dann auch eine Umgebung $U(p)$, wo Df surjektiv ist, also

$$p \in U(p) \text{ ist regulärer Punkt von } f.$$

Definiere

$$\Omega = \bigcup_{p \in M} U(p) \quad \text{offene Umgebung von } M$$

jeder Punkt in Ω regulärer Punkt von f, und

$$M = f^{-1}(0) \cap \Omega. \qquad \square$$