▪ Reguläre Punkte

Die Formulierung des IFS geht davon aus, dass bereits eine geeignete Zerlegung der Koordinaten in $x = (u, v)$ vorliegt. Im Allgemeinen ist diese jedoch nicht gegeben, und oft gibt es auch mehr als eine solche Zerlegung. Wir formulieren den IFS daher ein weiteres Mal ohne Bezug auf spezielle Koordinaten.

Zentral ist hier der Begriff des *regulären Punktes*. Bisher hatten wir erklärt, dass ein Punkt p regulär heißt für eine stetig differenzierbare Abbildung

$$f: \begin{Bmatrix} \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n \end{Bmatrix} \quad \text{genau dann, wenn} \quad \begin{Bmatrix} f'(p) \neq 0 \\ \nabla f(p) \neq 0 \\ \det Df(p) \neq 0 \end{Bmatrix}.$$

Wir verallgemeinern nun diese Definition auf beliebige Abbildungen $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$.

Definition *Sei $f: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Ein Punkt p im Definitionsbereich von f heißt regulärer Punkt von f, falls $Df(p)$ surjektiv ist. Andernfalls heißt er singulärer oder kritischer Punkt von f.* ⋊

Bemerkungen *a.* Für eine C^1-Abbildung $f: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ ist $Df(p)$ surjektiv genau dann, wenn $\operatorname{rang} Df(p) = m$. Somit beinhaltet diese Definition die obigen Spezialfälle.

b. Andererseits gilt

$$\operatorname{rang} Df(p) \leqslant \min\{n, m\}.$$

Im Fall $n < m$ kann also f keine regulären Punkte haben.

c. Insbesondere haben Kurven $\gamma: \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ für $m \geqslant 2$ keine regulären Punkte im Sinne dieser Definition. Der früher eingeführte Begriff des regulären Punktes einer Kurve 13.12 fällt somit *nicht* darunter. Der Begriff ›regulär‹ wird in so vielen Kontexten verwendet, dass solche Kollisionen manchmal auftreten. ⊸

12 **Niveauflächensatz** *Sei $f: \mathbb{R}^{m+n} \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar mit $n \geqslant 1$. Dann ist lokal um einen regulären Punkt jede Niveaumenge von f der Graph einer stetig differenzierbaren Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Nach Voraussetzung ist $\operatorname{rang} Df(p) = m$. Durch geeignete Nummerierung der Koordinaten können wir daher erreichen, dass die letzten m Spalten von $Df(p)$ linear unabhängig sind. Schreiben wir jetzt $x = (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ wie üblich, so gilt

$$\operatorname{rang} f_v(p) = m \quad \Leftrightarrow \quad \det f_v(p) \neq 0.$$

Wir können damit den IFS 11 anwenden und erhalten eine Umgebung

$$X = U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

von p, eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^m$ von $f(p)$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\Phi\colon U \times W \to V$, so dass für jedes $w \in W$

$$\begin{aligned} f^{-1}(w) \cap X &= \{(u,v) \in X : f(u,v) = w\} \\ &= \{(u,v) \in X : v = \Phi(u,w),\ u \in U\} \\ &= \Gamma(\Phi(\cdot,w)). \end{aligned}$$

Somit ist lokal um p jede Niveaumenge von f der Graph einer stetig differenzierbaren Abbildung. »»»

Bemerkung Der Satz gilt im Prinzip auch für $n = 0$. In diesem Fall ist der Umkehrsatz [1] anwendbar, und die Niveaumengen bestehen aus isolierten Punkten. ⊸

18.3 Mannigfaltigkeiten

Der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}$ respektive $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}$ ist ein eindimensionales Kurvenstück in der Ebene respektive ein zweidimensionales Flächenstück im Raum. Aber nicht alle Kurven oder Flächen sind als Graphen einer einzigen Funktion darstellbar. Das zeigen schon die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ und die Sphäre $\mathbb{S}^2$.

Man kann diese Mengen aber als *Niveaumengen* einer einzigen, stetig differenzierbaren Funktion beschreiben. So können wir die n-dimensionale Einheitssphäre schreiben als $\mathbb{S}^n = f^{-1}(1)$ mit

$$f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x_1^2 + .. + x_{n+1}^2.$$

Jeder Punkt in $\mathbb{S}^n$ ist ein *regulärer* Punkt von f. Somit ist die Sphäre $\mathbb{S}^n$ *lokal* immer als Graph einer Funktion $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ darstellbar [12]. Der Begriff der Mannigfaltigkeit verallgemeinert diese Überlegung.

13 **Definition** *Sei $n \geqslant 0$ und $m \geqslant 1$. Eine nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ heißt Mannigfaltigkeit der Kodimension m, wenn es eine offene Umgebung Ω von M in $\mathbb{R}^{n+m}$ und eine C^1-Abbildung $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ ohne singuläre Punkte gibt, so dass*

$$M = f^{-1}(0) \coloneqq \{x \in \Omega : f(x) = 0\}. \quad \rtimes$$

Bemerkungen *a.* Der Wert 0 hat keine besondere Bedeutung und kann durch jeden anderen Wert ersetzt werden.

b. Mannigfaltigkeiten der Kodimension 1 werden auch *Hyperflächen* genannt. Im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ spricht man von *Kurven* respektive *Flächen*.

c. Im Fall $n = 0$ besteht M aus isolierten Punkten. Es ist aber sinnvoll, auch solche Objekte als Mannigfaltigkeiten zu betrachten.

d. Genauer haben wir hier *gleichungsdefinierte Untermannigfaltigkeiten* des $\mathbb{R}^{n+m}$ definiert. Der differenzialtopologische Begriff der Mannigfaltigkeit ist wesentlich allgemeiner. ⊸

Bevor wir zu den Beispielen kommen, stellen wir fest, dass *lokal* jede Mannigfaltigkeit wie ein euklidischer Raum aussieht.

14 **Satz** *Sei M eine Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{n+m}$ der Kodimension m. Dann existiert zu jedem Punkt in M eine Umgebung W und ein Diffeomorphismus*

$$F : W \to V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

so dass

$$F(M \cap W) = \mathbb{R}^n \times 0^m \cap V. \qquad \rtimes$$

Man sagt, der Diffeomorphismus F *trivialisiert* lokal die Mannigfaltigkeit, da ein Ausschnitt um p diffeomorph auf einen Ausschnitt des $\mathbb{R}^n$ abgebildet wird.

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $M = f^{-1}(0)$ mit einer C^1-Abbildung $f : \mathbb{R}^{n+m} \supset \Omega \to \mathbb{R}^m$ ohne singuläre Punkte, und sei $p \in M$. Dann hat $Df(p)$ Rang m, und wir können die Koordinaten so umordnen, dass die hintere $m \times m$-Untermatrix von $Df(p)$ maximalen Rang hat. Setzen wir in einer Umgebung von p jetzt

$$F : \mathbb{R}^{n+m} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}, \quad (u, v) \mapsto (x, y) = (u, f(u, v)),$$

so ist

$$\det DF(p) = \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ f_u & f_v \end{pmatrix}(p) = \det(f_v(p)) \neq 0.$$

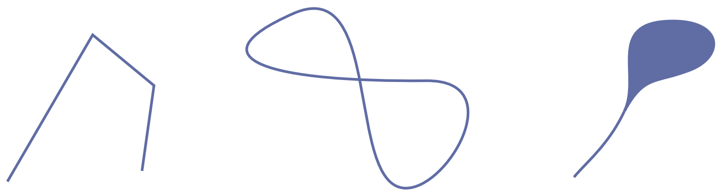
Also ist F ein lokaler Diffeomorphismus von einer Umgebung W von p auf eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Für diesen gilt

$$F(M \cap U) = F(f^{-1}(0) \cap U) = V \cap \{y = 0\}.$$

Also leistet F das Gewünschte. ⟩⟩⟩⟩⟩

Man kann jede solche Abbildung F als ein lokales *Koordinatensystem* auf M betrachten. Die Anzahl n dieser *Koordinaten* ist überall dieselbe und wird als *Dimension* der Mannigfaltigkeit M bezeichnet. Ihre *Kodimension* m ist die Anzahl der *Gleichungen*, durch die M bestimmt wird. Dies gilt auch für die

Abb 14 Keine Mannigfaltigkeiten



Dimension 0. Eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit ist eine Menge isolierter Punkte. Ihre Kodimension ist die Dimension des Gesamtraumes.

15 ▷ A. Im $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^{n+m}$ ist $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \{0\}^m$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension n und Kodimension m.

B. Ist $A\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ linear und surjektiv, so ist $\ker A = A^{-1}(0)$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension n und Kodimension m.

C. Die Sphären $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sind Mannigfaltigkeiten der Dimension n und Kodimension 1. Dies gilt auch für $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$.

D. Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ regulär, so ist jede nichtleere Menge $f^{-1}(c)$ eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit, nämlich genau ein Punkt.

E. Der Graph einer C^1-Abbildung

$$\varphi\colon \ \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m, \quad v = \varphi(u)$$

ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{n+m}$. Denn ist $D \subset \mathbb{R}^n$ der offene Definitionsbereich von φ, so ist $\Omega = D \times \mathbb{R}^m$ offen in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ und

$$f\colon \ \Omega \to \mathbb{R}^m, \quad f(u,v) = v - \varphi(u)$$

stetig differenzierbar. Wegen $f_v = \mathrm{Id}$ sind alle Punkte von f regulär, und es ist

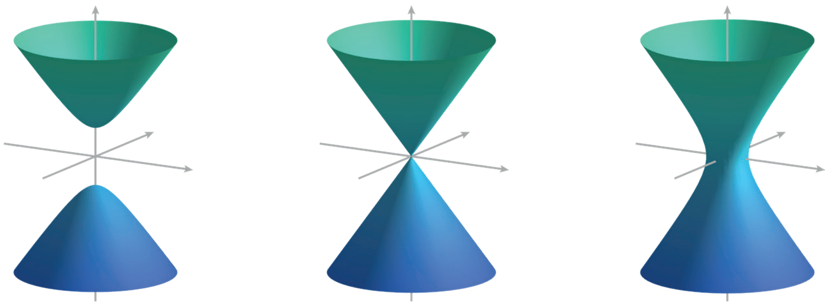
$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi) &= \{(u,v) \in \Omega : v = \varphi(u)\} \\ &= \{(u,v) \in \Omega : f(u,v) = 0\} \\ &= f^{-1}(0). \end{aligned}$$

Also ist $\Gamma(\varphi)$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{n+m}$.

F. Die Menge $M = \{1/n : n \geqslant 1\}$ ist eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}$, die Menge $M \cup \{0\}$ dagegen *nicht*.

G. Die geometrischen Gebilde oben sind *keine* Mannigfaltigkeiten, denn solche besitzen keine Ecken, keine Selbstschnitte, und haben überall dieselbe Dimension. ◁

Abb 15 Zweischaliges Hyperboloid, Kegel, und einschaliges Hyperboloid



16 ▹ *Hyperboloid und Kegel* Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2,$$

und ihre Niveaumengen

$$M_c = f^{-1}(c) = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 - z^2 = c\}.$$

Jeder Punkt mit Ausnahme des Koordinatenursprungs ist ein regulärer Punkt von f, und dieser liegt auf M_0. Daher ist jede Menge M_c mit $c \neq 0$ eine Mannigfaltigkeit der Kodimension 1 und Dimension 2, also eine Fläche im $\mathbb{R}^3$. Für $c > 0$ ist dies ein *einschaliges Hyperboloid*, für $c < 0$ ein *zweischaliges Hyperboloid*. Für $c = 0$ erhält man einen *Kegel*, der aufgrund seiner Spitze im Nullpunkt keine Mannigfaltigkeit bildet. ◂

▪ Reguläre Werte

Die Definition einer Mannigfaltigkeit $M = f^{-1}(0)$ verlangt von der definierenden Funktion f mehr als tatsächlich erforderlich ist. Es genügt, dass jeder Punkt *auf* M *selbst* ein regulärer Punkt von f ist. Dies führt zum Begriff des *regulären Wertes*.

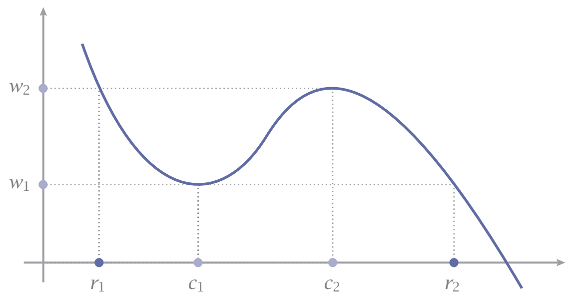
Definition *Sei $n \geqslant 0$ und $m \geqslant 1$, und $f\colon \mathbb{R}^{n+m} \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ sei stetig differenzierbar. Ein Punkt $w \in \mathbb{R}^m$ heißt regulärer Wert von f, wenn die Menge $f^{-1}(w)$ entweder leer ist oder nur aus regulären Punkten besteht. Andernfalls heißt w ein singulärer oder kritischer Wert von f.* ⋊

Bemerkungen *a.* Ein regulärer *Punkt* ist also ein Punkt im *Definitionsbereich*, ein regulärer *Wert* ein Punkt im *Wertebereich* einer Funktion.

b. Der Wert eines regulären Punktes muss kein regulärer Wert sein, denn auch nichtreguläre Punkte können auf denselben Wert abgebildet werden Abb 16.

Abb 16

Zwei kritische Punkte, zwei reguläre Punkte sowie zwei kritische Werte



c. Ob w ein regulärer Wert von f ist, hängt auch vom Definitionsbereich der Funktion ab. Für die Funktion $f\colon (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$ des letzten Beispiels $_{16}$ ist 0 kein regulärer Wert, da

$$0 \in f^{-1}(0), \qquad \nabla f(0) = 0.$$

Entfernen wir den Nullpunkt aus dem Definitionsbereich, wird 0 ein regulärer Wert. Die zugehörige Niveaufläche ist ein Kegel ohne seine Spitze, und diese Menge ist eine Mannigfaltigkeit. ⊸

Mit diesem Begriff erhalten wir folgende äquivalente Charakterisierung einer Mannigfaltigkeit.

17 **Satz** *Eine nichtleere Teilmenge M des $\mathbb{R}^{n+m}$ ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension n genau dann, wenn es eine C^1-Funktion $f\colon \mathbb{R}^{n+m} \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ mit regulärem Wert 0 gibt, so dass $M = f^{-1}(0)$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist $M = f^{-1}(0)$ eine Mannigfaltigkeit im Sinne unserer Definition $_{13}$, so ist insbesondere jeder Punkt in $f^{-1}(0)$ ein regulärer Punkt und damit 0 selbst ein regulärer Wert von f.

Sei umgekehrt 0 ein regulärer Wert von f. Dann ist jeder Punkt p in $M = f^{-1}(0)$ ein regulärer Punkt von f und damit $Df(p)$ surjektiv. Dies ist äquivalent mit der Eigenschaft, dass die Determinante einer geeigneten Auswahl von m Spalten von $Df(p)$ nicht verschwindet. Diese Determinante hängt stetig von p ab und ist somit auch auf einer offenen Umgebung von p nicht Null. Es existiert also zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung $U(p)$ in $\mathbb{R}^{n+m}$, so dass

$$\operatorname{rang} Df(x) = m, \qquad x \in U(p).$$

Setzen wir $\Omega = \bigcup_{p\in M} U(p)$, so erhalten wir eine M umfassende offene Menge Ω ohne singuläre Punkte von f. Also ist M eine Mannigfaltigkeit im Sinne unserer Definition $_{13}$. ⟩⟩⟩⟩⟩