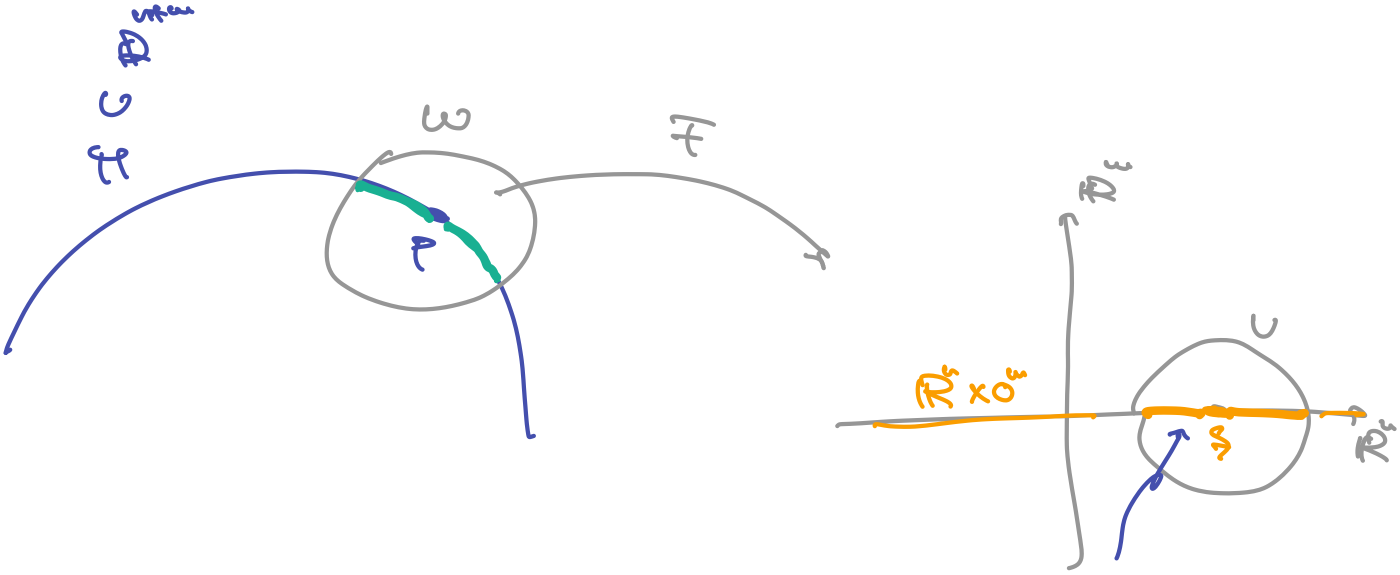
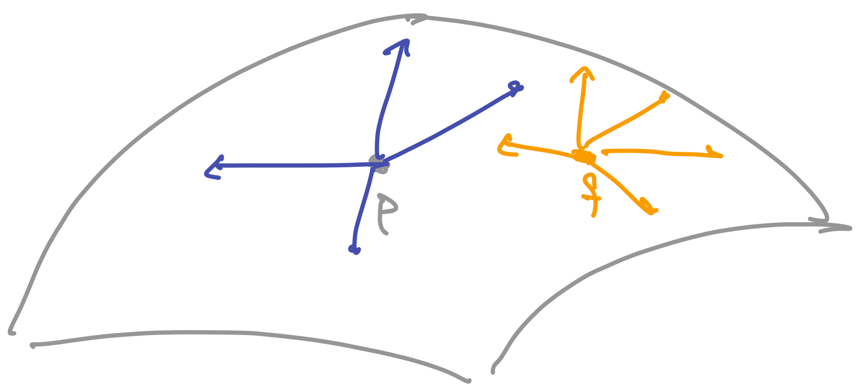
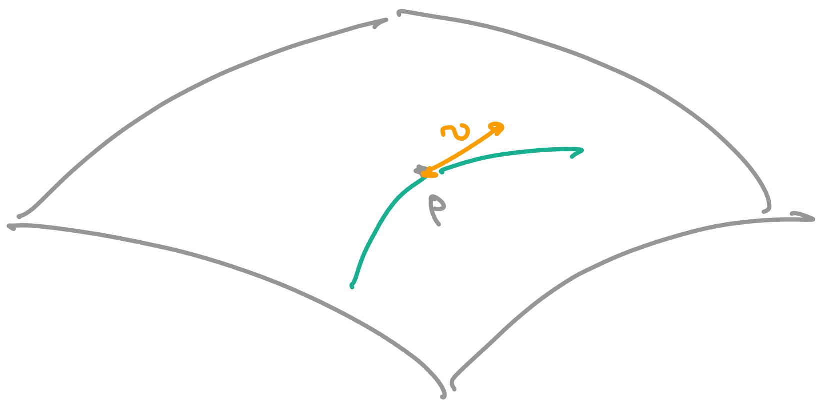
5. Vorlesung 8. 11. 2021



$$F(M \cap W) = (\mathbb{R}^n \times 0^m) \cap U$$





Bem.: Sei $p \in M$ fest. Sei

$$F : W \longrightarrow U$$

ein trivialisierender Diffeo um p:

$$F(M \cap W) = \mathbb{R}^n \times 0^m \cap U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

Definiere $\varphi = F^{-1}$ um $q = F(p)$.

Dann: $f \circ \varphi \equiv 0^m$

auf einer offenen Umgebung in $U \cap \mathbb{R}^n \times 0^m$.

Consequence:

$$(f\circ\Phi)(p+te_i) = 0, \qquad 1\le i\le n,\ t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$$

Also:

$$\boxed{Df(p)\cdot \underline{D\Phi(p)\cdot e_i} = 0}, \qquad 1\le i\le n.$$

Also:

$$\underbrace{D\Phi(p)\cdot e_i}_{\text{linear independent}} \in \underbrace{\ker Df(p)}_{\text{Dim } n}, \qquad 1\le i\le n$$

Also:

$$\underline{\mathrm{span}\{D\Phi(p)\cdot e_i : 1\le i\le n\}} = \underline{\ker Df(p)}$$

$$= \underline{T_pM}$$

Can picture [illegible] of M:

$$T_pM \oplus T_p^{\perp}M = \mathbb{R}^{n+m}$$

Demonstrație:

$$T_pM = \ker Df(p).$$

Fie f_k componentele lui f, $1\le k\le m$,

deci

$$\left(\begin{aligned} Df_k(p)\,v &= 0, \quad v\in T_pM \\ &= \langle \nabla f_k(p), v\rangle \quad \text{pt. orice } v\in T_pM \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \quad \nabla f_k(p) \perp T_pM, \quad 1\le k\le m$$

$$\left(\begin{aligned} Df_k(p)\,v &= 0, \quad v\in T_pM \\ &= \langle \nabla f_k(p), v\rangle \quad \text{pt. orice } v\in T_pM \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \quad \nabla f_k(p) \perp T_pM, \quad 1\le k\le m$$

$\uparrow$

m vectori în $\mathbb{R}^{n+m}$

liniar independenți, căci

$\operatorname{rang} Df(p) = m$

Deci:

$$\operatorname{span}\{\nabla f_k(p),\ 1\le k\le m\} = T_p^{\perp}M.$$

∎

Beispiel:

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^1$$

$$f(x) = |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$$

Dann

Spaltenvektor

$$\nabla f(x) = 2x = 0$$

$$\iff x = 0 .$$

Also: $\nabla f(x) \neq 0$ für $x \neq 0$.

Def: Jeder $w \neq 0$ ist regulärer Wert.

1 ist regulärer Wert, also

$$f^{-1}(1) = S^n .$$

Konsequenz für $x \in S^n$: $\nabla f(x) = 2x$,

also gilt x:

$$T_x^\perp S^n = \operatorname{span}\{x\}$$

$$T_x S^n = \{x\}^\perp$$

Tangentialebene:

$$x + T_x S^n = x + \{x\}^\perp$$

$$= x + \{v : \langle v, x\rangle = 0\}$$

$$= \{\tilde{v} : \langle \tilde{v} - x, x\rangle = 0\}$$

$\tilde{v} = x + v$

$$= \{v : \langle v, x\rangle = \langle x, x\rangle = 1\}$$

$$= \{v : \langle v, x\rangle = 1\}.$$

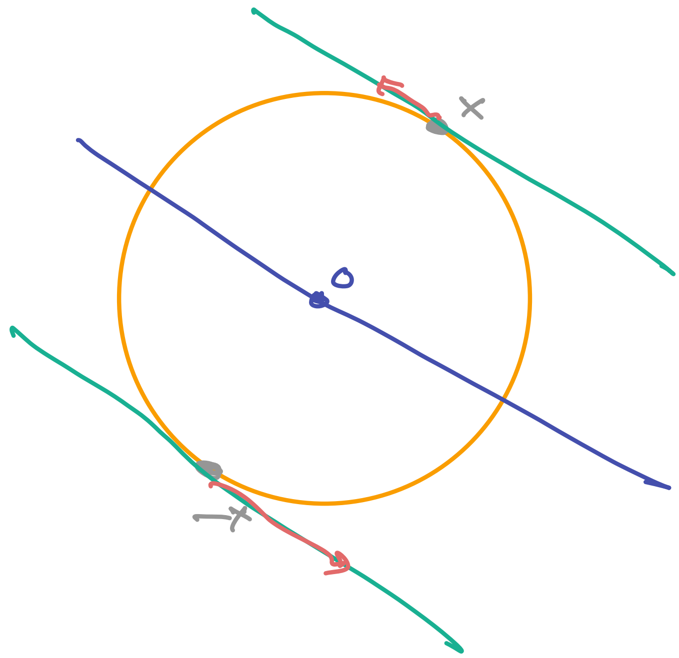
Bem:

$T_x S^n$ und $T_{-x} S^n$

als Unterräume gleich

x and $-x$ are S^d :

$T_x \gamma = \{x\}^\perp = T_{-x}\gamma$



$$(*)\quad \begin{cases} f(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2. \\ g_i(x) = 0, \quad 1 \le i \le m \end{cases}$$

Sei
$$g = (g_1, \dots, g_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$
und 0 sei regulärer Wert von g.

Dann beschreibt $(*)$ eine g^{-1} def. Mf M in $\mathbb{R}^n$, und

$$f|M$$

ist zu untersuchen.

Beweis: $f|M$ hat in $p \in M$ eine kritische Punkt genau dann, wenn sie entlang alle Kurven auf M durch p eine kritische Punkt in p besitzt,

$$Df(p) \cdot v = 0, \quad v \in T_pM$$

$$= \langle \nabla f(p), v \rangle$$

$$\Longleftrightarrow \quad \nabla f(p) \in T_p^{\perp} M. \quad \blacksquare$$

Beweis: Sei p kritischer Punkt von $f|M$:

$$\nabla f(p) \in T_p^{\perp} M$$

$$= \operatorname{span}\{\nabla g_1(p), \dots, \nabla g_m(p)\}$$

Also:

$\nabla f(p)$ ist Linearkombination von

$\nabla g_k(p)$, $1 \leq k \leq m$.

Beweis:

$$F(x,\lambda) = f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle$$
$$= f(x) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x).$$

äquivalente Formulierung.

[illegible] sei kritischer Punkt (p,μ):

(*) $$\partial_{\lambda_k} F(p,\mu) = g_k(p) \overset{!}{=} 0$$

und

(**) $$\partial_{x_\ell} F(p,\mu) = \partial_{x_\ell} f(p) + \sum_{k=1}^{m} \mu_k \partial_{x_\ell} g_k(p) \overset{!}{=} 0 \qquad 1 \leq \ell \leq n$$

(*) ist äquivalent mit
$$p \in M = g^{-1}(0)$$

(**) ist gleichbedeutend mit
$$\nabla F(p,\mu) = \nabla f(p) + \sum \mu_k \nabla g_k(p)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \nabla f(p) \in T_p^{\perp} M.$$

Also p kritischer Punkt von $f|_M$. ∎

Damit folgende Definition:

Gegeben f und $g = (g_1, \dots, g_m)$

Bilde

$$F = f + \langle \lambda, g \rangle \quad , \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

Bestimme kritische Punkte von

$$F = F(x, \lambda) \quad , \quad (x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

$\rightsquigarrow$ System von $n+m$ i. A. nichtlineare Gl.

Young's Inequality:

$$uv \le \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}, \qquad u, v \ge 0,$$

$$p, q > 1, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Optimize

$$\boxed{f(u,v) = \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}}, \qquad u, v \ge 0.$$

Feasibility: $\quad uv = 1.$

Also:

$$\boxed{g(u,v) = uv - 1.}$$

Lagrangian Function:

$$\boxed{F(u,v,\lambda) = \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} + \lambda(uv - 1)}$$

$$F_u = u^{p-1} + \lambda v = 0$$
$$F_v = v^{q-1} + \lambda u = 0$$
$$F_\lambda = uv - 1 = 0$$

$$\left.\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} (\,\cdot\, u \\ (\,\cdot\, v \end{matrix}$$

$$\Longrightarrow \quad u^p = v^q$$

$$\Longrightarrow \quad u = v = 1$$

$uv = 1$ absolutes Minimum.

Ergebnis:

$$\frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \geq f(1,1)$$
$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

mit $\underline{uv = 1}$.

Allgemeiner Fall durch Reskalierung: $u, v > 0$:

$$\tilde{u} = \frac{u}{(uv)^{1/p}}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{(uv)^{1/q}}.$$

$$\tilde{u}\tilde{v} = \frac{uv}{(\ )^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}} = \frac{uv}{uv} = 1.$$

Also:

$$\frac{\tilde{u}^p}{p} + \frac{\tilde{v}^q}{q} \geq 1$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \geq uv, \qquad u, v > 0.$$

∎

2. Beispiele.

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle$$

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Auf $S' = \{ x : \langle x, x \rangle = 1 \}$

besitzt f einen Max. u. Min,

also 2 kritische Punkte:

$$g(x) = 1 - \langle x, x \rangle$$

Erweiterte Funktion:

$$F(x, \lambda) = \langle Ax, x \rangle + \lambda (1 - \langle x, x \rangle)$$

Kritische Punkte:

$$\left. \begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ \langle x, x \rangle &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Ein kritischer Punkt von $\langle Ax, x \rangle$ auf S' ist ein <u>Eigenvektor</u> von A, sein Lagrangemult. sein Eigenwert.

Erweiterung: Sei v_1 der "alte" Eigenvektor.

Dann betrachte f auf

$$S^{n} \cap \{v_1\}^{\perp} .$$

N.e.B.:

$$\begin{cases} g_0(x) = 1 - \langle x, x \rangle = 0 \\ g_1(x) = \langle v_1, x \rangle = 0 . \end{cases}$$

Dann bekommen v_2:

v_2 Eigenvektor zu A,

λ_2 Eigenwert dazu.

u.s.w. ... $\leadsto$ orthonormale Basis

$v_1, \dots, v_i, v_n$

aus Eigenvektoren zu A. $\blacksquare$