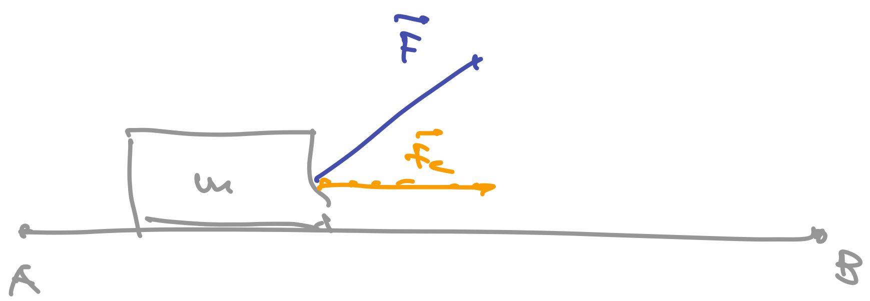
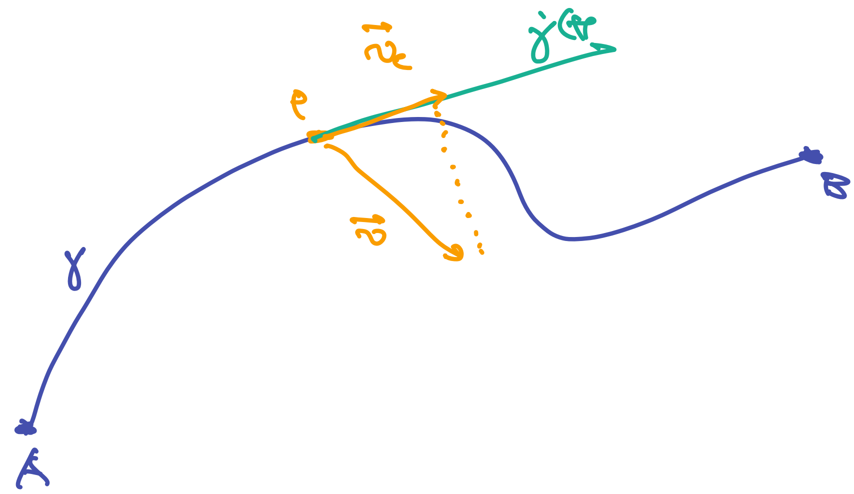
6. Vorlesung 4. 11. 2021



"$W = \vec{F}_e \cdot s$"



$$\omega = \int_a^b \langle \underbrace{v(\underset{p}{\underset{\shortparallel}{\gamma(t)}}), \dot{\gamma}(t) \rangle}\, dt$$

Skalarprodukt

in jedem Punkt $\left\{ \begin{array}{l} \text{Linearform} \\ \text{angewendet} \end{array} \right.$ $\langle v(\gamma(t)), \underset{\dot{\gamma}(t)}{\underset{\uparrow}{\cdot}} \rangle$

$\rightsquigarrow$ Differentialform, 1-Form,
Pfaffsche Form,

$V \cong \mathbb{R}^n$

$V^* = L(V, \mathbb{R})$

$\alpha : V \to V^*$

gleiche Dimension

$v : V \to V$ Vektorfeld

α am Punkt x angewandt auf $a \in V$:

Notation: $\alpha(x)a := \alpha(a)$

Bsp: 1. $f : U \to \mathbb{R}$ definiert Pfaffsche Form:

$$df : U \to U^*$$

$$x \mapsto df(x) :$$

$$\boxed{df(x)h := Df(x)h = \partial_h f(x).}$$

2. $v : U \to V$ stetiges Vektorfeld,

und $\langle \cdot , \cdot \rangle$ Skalarpr. auf V.

Damit:

$$\alpha_v := \langle v, \cdot \rangle$$

Also:

$$\alpha_v(h) = \langle v, h \rangle$$

Also:

$$\alpha_v(x) := \langle v(x), \cdot \rangle$$

3. Die Differentialform df kann man auch auf diese Weise darstellen:

$$df(x)h := Df(x)h$$
$$= \langle \nabla f(x), h \rangle$$
$$= \alpha_v(h) \quad \text{mit} \quad v = \nabla f$$

Also:
$$df = \alpha_{\nabla f}$$

4. Standardfall: $U = \mathbb{R}^n$

Koordinatenfunktion

$$\pi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \pi_k(x) = x_k$$

"Projektion"

Damit

$$d\pi_k(x)(h) = d\pi_k(h)$$
$$= D\pi_k(h) = h_k$$

Für $\mathcal{B} = e_1, \dots, e_n$ Standardbasis:

$$\underbrace{d\pi_k(e_l)}_{d\pi_k \text{ duale Basis zu } e_k} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \delta_{kl}, \qquad 1 \le k, l \le n.$$

$d\pi_k$ $\underbrace{\text{duale Basis}}_{\text{in } V^*}$ zu $\underbrace{e_k}_{\text{in } V = \mathbb{R}^n}$

Schreibe x_k statt π_k:

$$\alpha(e_l) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \underbrace{dx_k(e_l)}_{\delta_{kl}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \cdot \delta_{kl}$$

$$= a_l(x)$$

$\alpha(x)e_l$.

Beispiele:

1. Dim 1: $U = \mathbb{R}^1$:

$$\alpha = a(x)\, dx$$

einzige Koeff.-Funktion.

2. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$df = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(x)\, dx_k$$

Denn:

$$df(e_k) = Df(x)\, e_k = \partial_k f(x).$$

3 $$v = \sum_{k=1}^{n} v_k e_k = \sum_{k=1}^{n} v_k(x)\, e_k$$

$$\alpha_v = \langle v, \cdot \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} v_k(x)\, dx_k$$

Bsp:

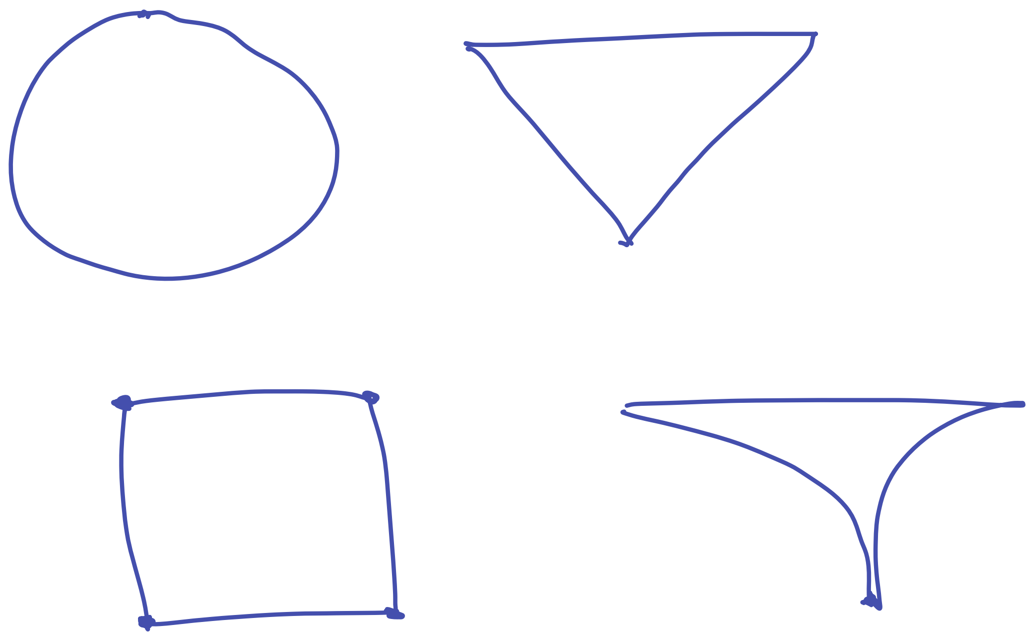
$$\alpha_v(e_k) = \langle v, e_k \rangle$$

$$= v_k(x) .$$

Dafür schreibt man klassisch:

$$\alpha_v = v \cdot dx$$

$(v_1, \dots, v_n)$ $\quad$ $dx = (dx_1, \dots, dx_n)$



$\gamma \in \mathcal{D}^1(I, U)$:

$$L(\gamma) = \sum_{k=1}^{n} L\left(\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}\right)$$

Sprungstelle (Ecke)

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \underbrace{\|\dot{\gamma}(t)\|}_{\text{stetig}} \, dt$$

$$= \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \underbrace{\underbrace{\underbrace{\alpha(\gamma(t))}_{\text{lin. Form}} \cdot \underbrace{\dot\gamma(t)}_{\text{Vektor}}}_{\text{bei } \gamma(t)}}_{\text{reelle Funktion von } t} \in \mathbb{R}.$$

Integrand ist stetige reelle Funktion

Standardfall:

$$\alpha = \sum_{k=1}^n a_k(x)\, dx_k$$

$$\dot\gamma = \sum_{k=1}^n \dot\gamma_k(t)\, e_k$$

Dann:

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n a_k(\gamma(t))\, \dot\gamma_k(t) \right) dt$$

da ja:

$$dx_k(\dot\gamma(t)) = \sum_{l=1}^n \dot\gamma_l(t)\, dx_k(e_l) = \dot\gamma_k(t).$$

Beispiele :

1. $\alpha = y^2\,dx + dy$ auf $\mathbb{R}^2$

$\gamma_\sigma : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\gamma_\sigma(t) = (t, t^\sigma)$, $\sigma > 0$:

Dann :

$$\int_{\gamma_\sigma} \alpha = \int_0^1 \underbrace{\big(\underbrace{t^{2\sigma}\,dx + dy}_{\alpha(\gamma(t))}\big)}\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \sigma t^{\sigma-1} \end{pmatrix}}_{\dot\gamma_\sigma} dt$$

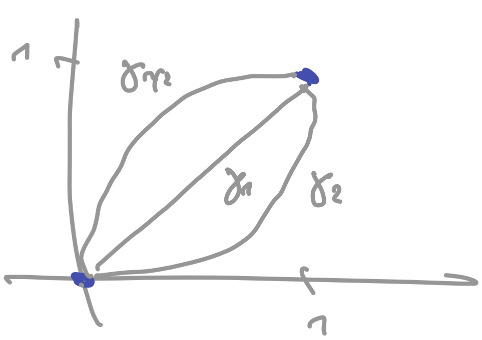
$$= \int_0^1 \left(t^{2\sigma}\cdot 1 + \sigma t^{\sigma-1}\right) dt$$

$$= \left(\frac{t^{2\sigma+1}}{2\sigma+1} + t^\sigma\right)\Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2\sigma+1}.$$

Abhängig von σ ab :

$$= \left(\frac{t^{2\sigma+1}}{2\sigma+1} + t^\sigma\right)\Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2\sigma+1}.$$

Abhängig von σ ab :



2. <u>Windungsform</u>:

$$\underset{\text{"Omega"}}{\omega} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2}\,dy - \frac{y}{x^2+y^2}\,dx$$

auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Einheitskreis:

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi:$$

Dann:

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \underbrace{(\cos t\,dy - \sin t\,dx)}_{\omega_{\gamma(t)}} \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\text{Tangente}} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = 2\pi.$$

Allgemein:

$$\gamma_m(t) = (\cos \underline{mt}, \sin \underline{mt})$$

$$\int_{\gamma_m} \omega = \int_0^{2\pi} m(\cos mt\,dy - \sin mt\,dx) \begin{pmatrix} -\sin mt \\ \cos mt \end{pmatrix} dt$$

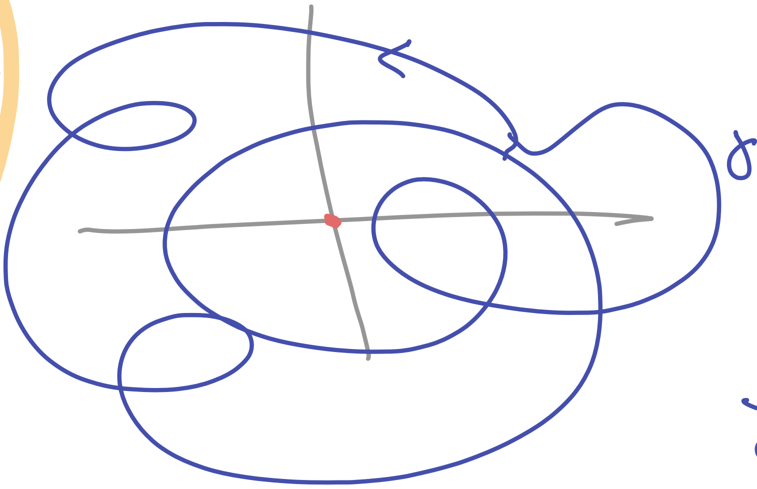
$$= 2\pi m.$$

Also:

$$\int_{\gamma_m} \omega = \underbrace{2\pi m}_{}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

2π · Anzahl der Umläufe von γ_m um $(0,0)$

Anzahl: 2-mal!

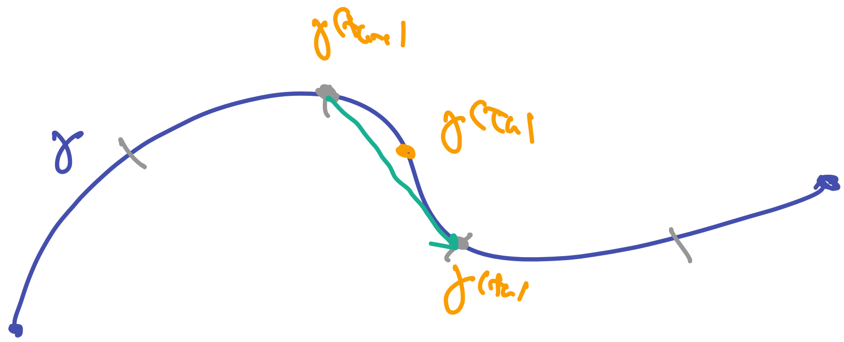


$$\int_\gamma \omega = 2\pi \cdot 2.$$

$\gamma : [a,b] \to U$

Tagging $(t_0, \dots, t_n)$ on $[a,b]$

$$\omega_T(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \alpha(\gamma(\tau_k))\,(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})) \qquad \tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$$



Beweis: γ ist rektifizierbar:

$$L = L(\gamma) < \infty.$$

Spur γ ist abg. und beschränkt, also kompakt.

$\alpha|_{\text{Spur}\,\gamma}$ ist glm. stetig:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ ex. ein $\delta > 0$, so dass

für $\underbrace{|u - v| < \delta}$:

$$\| \alpha \circ \gamma|_u^v \|_* < \frac{\varepsilon}{L}$$

Operatornorm auf V^* zu $\|.\|$ auf V,

also: $|\alpha(h)| \leq \|\alpha\|_* \|h\|.$

Damit

$$\omega_\gamma(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \alpha(\gamma(\tau_k))\,(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha(\gamma(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot\gamma(t)\,dt$$

linear

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \alpha(\gamma(\tau_k))\,\dot\gamma(t)\,dt$$

Damit

$$\left| \omega_\gamma(\alpha) - \int_\gamma \alpha \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\alpha(\gamma(\tau_k)) - \alpha(\gamma(t)) \right) \dot\gamma(t)\,dt \right|$$

Also:

$$|\dots| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \| \quad \|_* \cdot \|\dot\gamma(t)\|\,dt$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\varepsilon}{L} \|\dot\gamma(t)\|\,dt$$

$$= \frac{\varepsilon}{L} \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,dt = \varepsilon .$$

Beweis: γ und φ sind stetig diffb.

Sei $I_* = [a_*, b_*]$, Dann

$$I = [a, b] = \varphi(I_*) = [\varphi(a_*), \varphi(b_*)]$$

Dann:

$$\int_{\gamma_*} \alpha = \int_{a_*}^{b_*} \alpha(\gamma_*(t))\, \dot\gamma_*(t)\, dt$$

$\gamma_* = \gamma \circ \varphi$

$$= \int_{a_*}^{b_*} \alpha(\gamma(\varphi(t))) \cdot \dot\gamma(\varphi(t)) \cdot \dot\varphi(t)\, dt$$

$$\overset{\text{Subst.}}{=} \int_{\varphi(a_*)}^{\varphi(b_*)} \alpha(\gamma(s)) \cdot \dot\gamma(s)\, ds$$

$$= \int_a^b \alpha(\gamma(s))\, \dot\gamma(s)\, ds = \int_\gamma \alpha .$$

$\blacksquare$