19

Wegintegrale

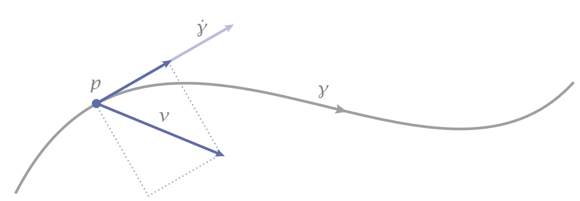
Die entlang eines geradlinigen Weges bei gleichbleibender Krafteinwirkung geleistete Arbeit ist das Produkt aus zurückgelegter Wegstrecke und in Richtung dieser Wegstrecke wirkender Kraftkomponente. Will man allgemeiner die geleistete Arbeit entlang eines beliebigen Weges γ innerhalb eines Kraftfeldes v bestimmen, so ist in jedem Punkt die anliegende Kraft auf den momentanen Geschwindigkeitsvektor zu projizieren und das resultierende Produkt über den Weg zu integrieren. Dies führt zu einem Integral der Form

$$\int_a^b \langle v(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, \mathrm{d}t$$

für die geleistete Arbeit.

Mathematisch kann man den Integranden auffassen als die Anwendung der *Linearform* $\langle v, \cdot \rangle$ auf den *Vektor* $\dot{\gamma}$. Die Weiterentwicklung dieses Gedankens führt zum Begriff der *Differenzialform*, die entlang eines Weges zu integrieren ist. Dies vermeidet unter anderem die Einbeziehung eines Skalarprodukt und erlaubt eine koordinatenfreie Interpretation solcher Kurvenintegrale.

Abb 1 Weg in einem Kraftfeld



19.1 Pfaffsche Formen

? Sei zunächst V ein Vektorraum endlicher Dimension und $V^* = L(V, \mathbb{R})$ sein Dualraum, also der Raum aller stetigen linearen Abbildungen $V \to \mathbb{R}$.

1 **Definition** *Eine Pfaffsche Form oder 1-Form ist eine Abbildung*

$$\alpha : V \hookrightarrow V^*, \quad x \mapsto \alpha(x),$$

die jedem Punkt in ihrem Definitionsbereich eine Linearform zuordnet. ⋊

Pfaffsche Formen werden auch *Differenzialformen vom Grad 1* genannt. Für die Anwendung einer 1-Form α am Punkt x auf einen Vektor $h \in V$ schreiben wir $\alpha(x)h$ oder kürzer $\alpha(h)$, wenn der Punkt x keine besondere Rolle spielt.

Wir beschränken uns auf *reellwertige* 1-Formen. Komplexwertige 1-Formen spielen in der Funktionentheorie eine zentrale Rolle und werden dort betrachtet.

2 ⊳ a. Eine differenzierbare Funktion $f : V \hookrightarrow \mathbb{R}$ definiert eine Pfaffsche Form

$$\mathrm{d}f : V \hookrightarrow V^*, \qquad x \mapsto \mathrm{d}f(x),$$

genannt das *Differenzial* von f, durch

$$\mathrm{d}f(x)h \coloneqq Df(x)h = \partial_h f(x).$$

b. Sei $v : V \hookrightarrow V$ ein stetiges *Vektorfeld*, also eine Abbildung, die jedem Punkt in seinem Definitionsbereich in V einen Vektor *desselben* Vektorraumes zuordnet. Mithilfe eines Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V induziert dies eine 1-Form

$$\alpha_v \coloneqq \langle v, \cdot\rangle .$$

c. Ist $\alpha = \mathrm{d}f$, so ist $v = \nabla f$, denn

$$\langle \nabla f, \cdot\rangle = \mathrm{d}f = \alpha_v = \langle v, \cdot\rangle . \quad ◅$$

Der Standardfall

Wie sehen 1-Formen im Standardfall $V = \mathbb{R}^n$ aus? Auf dem $\mathbb{R}^n$ sind die *Koordinatenfunktionen*

$$\pi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \pi_k(x) = x_k,$$

stetig differenzierbar, und es gilt

$$\mathrm{d}\pi_k(h) = D\pi_k(h) = h_k.$$

Für die Standardbasis $e_1, .., e_n$ des $\mathbb{R}^n$ gilt insbesondere

$$\mathrm{d}\pi_k(e_l) = \delta_{kl}, \qquad 1 \leqslant k, l \leqslant n.$$

Die Differenziale $\mathrm{d}\pi_1, .., \mathrm{d}\pi_n$ bilden also gerade die zur Standardbasis $e_1, .., e_n$ *duale Basis*. Bezeichnen wir jetzt vereinfachend die k-te Koordinatenfunktion mit x_k anstelle von π_k, gelangen wir zur folgenden

Definition *Die zur Standardbasis $e_1, .., e_n$ des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ duale Basis des Dualraums wird mit $\mathrm{d}x_1, .., \mathrm{d}x_n$ bezeichnet.* ⋊

Jede 1-Form im $\mathbb{R}^n$ kann damit dargestellt werden als Linearkombination dieser Basisformen, also als

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\,\mathrm{d}x_k.$$

Ihre Koeffizienten sind reelle Funktionen, für die $a_k = \alpha(e_k)$ gilt.

⊳ a. Im eindimensionalen Standardfall hat jede Pfaffsche Form die Gestalt

$$\alpha = a(x)\,\mathrm{d}x.$$

Sie ist also durch eine einzige skalare Funktion gegeben.

b. Das Differenzial einer C^1-Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hat die Darstellung

$$\mathrm{d}f = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(x)\,\mathrm{d}x_k,$$

denn $\mathrm{d}f(e_k) = Df e_k = \partial_k f$. Die partiellen Ableitungen von f sind also gerade die Koeffizienten des Differenzials $\mathrm{d}f$ bezüglich der Standardbasis.

c. Die durch ein Vektorfeld $v = \sum_{k=1}^{n} v_k(x) e_k$ induzierte 1-Form 2 ist

$$\alpha_v = \langle v, \cdot \rangle = \sum_{k=1}^{n} v_k(x)\,\mathrm{d}x_k,$$

denn deren Koeffizienten sind $\alpha_v(e_k) = \langle v, e_k \rangle = v_k$. Dies schreibt man auch gerne als klassisches Skalarprodukt

$$\alpha_v = v \bullet \mathrm{d}x$$

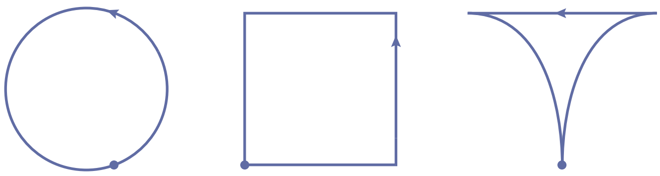
aus $v = (v_1, .., v_n)$ und $\mathrm{d}x = (\mathrm{d}x_1, .., \mathrm{d}x_n)$. ⊲

Schließlich erklären wir noch die Regularität von 1-Formen.

Definition *Eine 1-Form α heißt stetig respektive von der Klasse C^r, wenn sie als Abbildung $\alpha : V \to V^*$ stetig respektive von der Klasse C^r ist.* ⋊

Für eine Basisdarstellung einer 1-Form bedeutet dies, dass sämtliche Koeffizientenfunktionen stetig respektive von der Klasse C^r sind.

Abb 2 Stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurven



19.2 Kurven- und Wegintegrale

Wir definieren nun das Integral von 1-Formen entlang Kurven so, wie wir in der Einleitung das Arbeitsintegral skizziert haben. Dabei betrachten wir stückweise stetig differenzierbare Kurven, die wir in Abschnitt 13.5 wie folgt definiert hatten. Zur Wiederholung:

Definition *Eine stetige Kurve $\gamma\colon I \to V$ ist stückweise stetig differenzierbar, wenn es eine Teilung $(t_1, .., t_n)$ des Intervalls I gibt, so dass alle Abschnitte $\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$ mit $1 \leqslant k \leqslant n$ stetig differenzierbar sind. Die Klasse aller dieser Kurven wird mit $D^1(I,V)$ bezeichnet.* ⋊

Insbesondere besitzt die Ableitung einer D^1-Kurve in jedem inneren Teilungspunkt links- und rechtsseitige Grenzwerte. Summe und skalare Vielfache von D^1-Kurven sind wieder D^1-Kurven. Somit ist $D^1(I,V)$ ein reeller Vektorraum.

Da wir es im Folgenden nur mit Integralen zu tun haben, müssen wir die Teilungspunkte einer D^1-Kurve nicht explizit betrachten. Für die Kurvenlänge gilt zum Beispiel

$$L(\gamma) = \sum_{k=1}^{n} L(\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot\gamma(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| \,\mathrm{d}t,$$

denn die endlich vielen Sprungstellen des Integranden an den Teilungspunkten haben keinen Einfluss auf das Integral $_{10.12}$. Ebenso verhält es sich mit den übrigen Integralen, die wir noch betrachten werden. — Nun zur Definition des Kurvenintegrals.

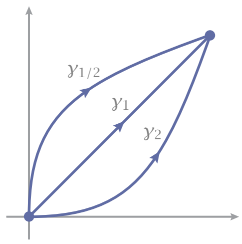
3 **Definition** *Sei $\alpha\colon V \hookrightarrow V^*$ eine stetige 1-Form und $\gamma\colon [a,b] \to V$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve im Definitionsbereich von α. Dann heißt*

$$\int_\gamma \alpha \coloneqq \int_a^b \alpha(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t$$

das Kurvenintegral von α längs der Kurve γ. ⋊

Abb 3

Integrationswege γ_σ in Beispiel 4



An jedem Kurvenpunkt $\gamma(t)$ wird also die 1-Form $\alpha(\gamma(t))$ auf den Vektor $\dot\gamma(t)$ angewendet. Das Ergebnis ist eine skalare Funktion, die wie üblich über das Parameterintervall der Kurve integriert wird.

Im Standardfall mit

$$\alpha = \sum_{k=1}^n a_k \, \mathrm{d}x_k, \qquad \dot\gamma = \sum_{k=1}^n \dot\gamma_k e_k$$

ergibt dies

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n a_k(\gamma(t))\dot\gamma_k(t) \right) \mathrm{d}t,$$

da ja

$$\mathrm{d}x_k(\dot\gamma) = \sum_{l=1}^n \dot\gamma_l \, \mathrm{d}x_k(e_l) = \dot\gamma_k .$$

4 ▷ Sei $\alpha = y^2 \, \mathrm{d}x + \mathrm{d}y$ eine 1-Form auf $\mathbb{R}^2$ und $\sigma > 0$. Entlang der Kurve

$$\gamma_\sigma : \ [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_\sigma(t) = (t, t^\sigma)$$

erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\sigma} \alpha &= \int_0^1 (t^{2\sigma} \, \mathrm{d}x + \mathrm{d}y) \, (1, \sigma t^{\sigma-1})^\top \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (t^{2\sigma} + \sigma t^{\sigma-1}) \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{t^{2\sigma+1}}{2\sigma+1} + t^\sigma \bigg|_0^1 = 1 + \frac{1}{2\sigma+1}. \end{aligned}$$

Das Ergebnis hängt also vom Weg ab, auch wenn alle Kurven gleichen Anfangspunkt $(0,0)$ und gleichen Endpunkt $(1,1)$ haben. ◁

5 ▷ *Windungsform* Die 1-Form

$$\upsilon = \frac{x \, \mathrm{d}y - y \, \mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$$

auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ wird *Windungsform* genannt. Für die Standardparametrisierung γ des Einheitskreises, also $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ mit $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, erhält man

$$\begin{aligned}\int_\gamma \upsilon &= \int_0^{2\pi} (-\sin t \,\mathrm{d}x + \cos t \,\mathrm{d}y)\,(-\sin t, \cos t)^\top \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

Ist allgemeiner $m \in \mathbb{Z}$ und γ_m mit $\gamma_m(t) = (\cos mt, \sin mt)$ der m-mal durchlaufene Einheitskreis, so ist

$$\int_{\gamma_m} \upsilon = \int_0^{2\pi} m(\sin^2 t + \cos^2 t)\,\mathrm{d}t = 2\pi m.$$

Das Integral misst also, bis auf den Faktor 2π, wie oft sich γ_m um den Nullpunkt herum windet. Wie wir noch sehen werden, gilt dies auch für jede andere geschlossene Kurve, die nicht durch den Nullpunkt hindurch läuft $_{13}$. ◅

Wir wollen uns noch davon überzeugen, dass unsere Definition des Kurvenintegrals $_3$ ›natürlich‹ ist. Das heißt, wir gelangen zu demselben Integral, wenn wir es durch endliche Summen approximieren. Sei dazu $(t_1, .., t_n)$ eine Teilung von $[a, b]$. Eine zugehörige Teilungssumme ist dann

$$W_T(\alpha) = \sum_{k=1}^n \alpha(\gamma(\tau_k))(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})),$$

wobei die Auswertungspunkte $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ beliebig gewählt seien.

6 **Satz** *Ist α stetig und γ stückweise stetig differenzierbar, so gilt*

$$W_T(\alpha) \to \int_\gamma \alpha = \int_a^b \alpha(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t,$$

wenn die Feinheit der Teilung T gegen Null strebt. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Eine stückweise stetig differenzierbare Kurve γ ist rektifizierbar. Es ist also $L \coloneqq L(\gamma) < \infty$. Außerdem ist ihre Spur eine kompakte Teilmenge von V. Die stetige 1-Form α entlang γ ist somit *gleichmäßig* stetig $_{7.32}$. Das heißt, zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\|\alpha \circ \gamma|_u^v\|_* < \frac{\varepsilon}{L}, \qquad |u - v| < \delta. \tag{1}$$

Dabei bezeichnet $\|\cdot\|_*$ die durch eine Norm $\|\cdot\|$ auf V induzierte Operatornorm auf V^*. Es gilt also $|\alpha(h)| \leqslant \|\alpha\|_* \, \|h\|$. Schreibe jetzt

$$\begin{aligned} W_T(\alpha) &= \sum_{k=1}^{n} \alpha(\gamma(\tau_k))(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha(\gamma(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \alpha(\gamma(\tau_k))\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Dann wird mit der Definition des Wegintegrals 3

$$W_T(\alpha) - \int_\gamma \alpha = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\alpha(\gamma(\tau_k)) - \alpha(\gamma(t))]\,\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ist die Feinheit von T kleiner als δ, so können wir auf jeden Term in eckigen Klammern die Abschätzung (1) anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \left| W_T(\alpha) - \int_\gamma \alpha \right| &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\alpha(\gamma(\tau_k)) - \alpha(\gamma(t))\|_* \, \|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t \\ &< \frac{\varepsilon}{L} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\varepsilon}{L} \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t = \varepsilon. \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. ⟫⟫⟫

- **Invarianz**

Das Interessante und Wesentliche am Kurvenintegral ist, dass es *unabhängig* von der gewählten Parametrisierung der Kurve ist.

Lemma *Sei $\alpha: V \hookrightarrow V^*$ eine stetige 1-Form, $\gamma: I \to V$ eine D^1-Kurve im Definitionsbereich von α und $\varphi: I_* \to I$ eine orientierungstreue D^1-Parametertransformation. Dann gilt*

$$\int_{\gamma\circ\varphi} \alpha = \int_\gamma \alpha. \qquad \rtimes$$

⟪⟪⟪ Seien γ und φ zunächst stetig differenzierbar. Für $I_* = [a_*, b_*]$ gilt

$$I = [a,b] = \varphi(I_*) = [\varphi(a_*), \varphi(b_*)],$$

da φ die Orientierung erhält. Für $\gamma_* = \gamma\circ\varphi$ folgt mit der klassischen Substitutionsregel daher

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_*} \alpha &= \int_{a_*}^{b_*} \alpha(\gamma_*(t))\dot{\gamma}_*(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{a_*}^{b_*} \alpha(\gamma(\varphi(t)))\dot{\gamma}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\varphi(a_*)}^{\varphi(b_*)} \alpha(\gamma(s))\dot{\gamma}(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^b \alpha(\gamma(s))\dot{\gamma}(s)\,\mathrm{d}s = \int_\gamma \alpha.\end{aligned}$$

Mit einer geeigneten Zerlegung in endlich viele Teilintervalle folgt die Behauptung dann auch für D^1-Kurven und D^1-Parametertransformationen. »»»

Die Unabhängigkeit des Kurvenintegrals einer 1-Form von der gewählten Parametrisierung der Kurve erlaubt es uns, dieses auch für einen *Weg* zu definieren, also eine *Äquivalenzklasse* von parametrisierten Kurven.

19.8 **Definition** *Das Wegintegral einer stetigen 1-Form α entlang eines Weges ω ist definiert als*

$$\int_\omega \alpha \coloneqq \int_\gamma \alpha,$$

wobei γ eine beliebige D^1-Parametrisierung von ω bezeichnet. ⋊

Bemerkung Man kann das Wegintegral auch für geeignete *stetige* Kurven definieren und stetige Parametertransformationen betrachten. Uns geht es hier jedoch nicht um möglichst geringe Regularitätsvoraussetzungen. Daher gehen wir darauf nicht ein. ⊸