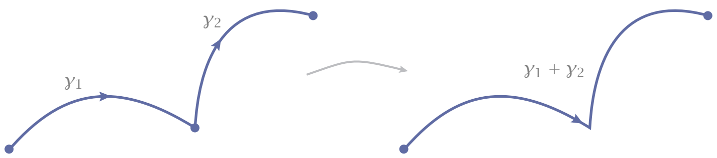
Abb 4 Addition von Kurven



Wegadditivität

Das Wegintegral $\int_\omega \alpha$ ist nicht nur linear bezüglich der Differenzialform α, sondern auch additiv bezüglich des Integrationsweges ω. Dazu definieren wir die Addition geeigneter Wege wie folgt. Seien ω_1 und ω_2 zwei Wege in V, wo der Endpunkt von ω_1 mit dem Anfangspunkt von ω_2 zusammenfällt, und

$$\gamma_1 : [a,b] \to V, \qquad \gamma_2 : [c,d] \to V$$

zwei stetige Parametrisierungen dieser Wege. Dann ist $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, und wir können das zweite Parameterintervall noch so verschieben, dass $b = c$. Dann definiert

$$\gamma_1 + \gamma_2 : [a,d] \to V, \quad (\gamma_1 + \gamma_2)(t) \coloneqq \begin{cases} \gamma_1(t), & a \leqslant t \leqslant b, \\ \gamma_2(t), & c \leqslant t \leqslant d, \end{cases}$$

eine stetige Kurve in V. Die zugehörige Äquivalenzklasse definieren wir als

$$\omega_1 + \omega_2 \coloneqq [\gamma_1 + \gamma_2].$$

Man überlegt sich, dass diese Definition nicht von der Wahl der Parametrisierungen abhängt, denn zu γ_1 und γ_2 äquivalente Parametrisierungen führen zu einer zu $\gamma_1 + \gamma_2$ äquivalenten Parametrisierung. Sind zudem ω_1 und ω_2 von der Klasse D^1, so ist es auch $\omega_1 + \omega_2$ [1].

Ist ferner $\omega = [\gamma]$ mit $\gamma : [a,b] \to V$, so definiert die in umgekehrter Richtung durchlaufene Kurve

$$\gamma_- : [a,b] \to V, \qquad \gamma_-(t) \coloneqq \gamma(a+b-t)$$

den umgekehrt durchlaufenen Weg

$$-\omega \coloneqq [\gamma_-].$$

Rechenregeln *Seien $\alpha : V \hookrightarrow V^*$ eine stetige 1-Form und $\omega, \omega_1, \omega_2$ stückweise stetig differenzierbare Wege im Definitionsbereich von α. Dann*

[1] Dies ist übrigens einer der Vorteile, *stückweise* stetig differenzierbare Kurven zu betrachten.

gilt

$$\int_{-\omega} \alpha = -\int_{\omega} \alpha, \qquad \int_{\omega_1+\omega_2} \alpha = \int_{\omega_1} \alpha + \int_{\omega_2} \alpha,$$

falls die Summe von ω_1 *und* ω_2 *erklärt ist. Weiter gilt*

$$\left| \int_{\omega} \alpha \right| \leqslant L(\omega) \max_{p\in\omega} \|\alpha(p)\|_* ,$$

wenn die Länge bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$ *auf* V *bestimmt wird und* $\|\cdot\|_*$ *die zugehörige induzierte Norm auf* V^* *bezeichnet.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir beweisen nur die letzte Behauptung, der Rest ist Routine. Mit einer beliebigen Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \to V$ von ω gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\omega} \alpha \right| &= \left| \int_a^b \alpha(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \int_a^b |\alpha(\gamma(t))\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_a^b \|\alpha(\gamma(t))\|_*\,\|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \max_{p\in\omega} \|\alpha(p)\|_* \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Das letzte Integral ist gerade die Länge $L(\omega)$ von ω. ⟩⟩⟩⟩⟩

19.3 Wegintegrale exakter 1-Formen

Die explizite Bestimmung eines klassischen Integrals ist aufgrund des Hauptsatzes 10.16 gleichbedeutend mit dem Auffinden einer Stammfunktion. Entsprechendes gilt auch für Wegintegrale, wenn die betreffende 1-Form *exakt* ist.

Definition *Eine 1-Form* α *heißt* ***exakt****, wenn es eine* C^1*-Funktion* f *gibt, so dass*

$$\alpha = \mathrm{d}f$$

auf dem gemeinsamen offenen Definitionsbereich. Jede solche Funktion f *heißt eine* ***Stammfunktion*** *von* α*.* ⋊

▷ *1-Formen auf einem Intervall* Ist $\alpha = a(x)\,\mathrm{d}x$ stetig auf dem Intervall I und $x_0 \in I$, so definiert aufgrund des Stammfunktionensatzes 10.14 [2]

$$f(x) := \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in I,$$

[2] Im Folgenden verwenden wir $\mathrm{d}t$ für das klassische Integral und $\mathrm{d}x$ für 1-Formen.

eine stetig differenzierbare Funktion f auf I mit der Eigenschaft, dass

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x = a(x)\,\mathrm{d}x.$$

Somit ist *jede* auf einem Intervall stetige 1-Form exakt. ◂

▹ *Zentralfeld auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$* Eine 1-Form der Gestalt

$$\alpha = \varphi(\|x\|) \sum_{k=1}^{n} x_k\,\mathrm{d}x_k$$

mit einer stetigen Funktion $\varphi\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist exakt. Eine Stammfunktion f auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist zum Beispiel gegeben durch

$$f(x) = F(\|x\|) = \int_1^{\|x\|} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Denn für die euklidische Norm gilt

$$\mathrm{d}(\|x\|) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\|x\|}\,\mathrm{d}x_k, \qquad x \neq 0,$$

und somit

$$\mathrm{d}f(x) = F'(\|x\|)\mathrm{d}(\|x\|) = \varphi(\|x\|) \sum_{k=1}^{n} x_k\,\mathrm{d}x_k. \quad ◂$$

Die Wegintegrale exakter 1-Formen sind nun leicht zu berechnen. Es gilt folgende Verallgemeinerung des Hauptsatzes 10.16.

7 **Hauptsatz für Wegintegrale** *Ist die 1-Form α exakt mit Stammfunktion f, so gilt*

$$\int_\omega \alpha = \int_\omega \mathrm{d}f = f\Big|_{\omega_a}^{\omega_b}$$

für jeden stückweise stetig differenzierbaren Weg ω im Definitionsbereich von α mit Anfangspunkt ω_a und Endpunkt ω_b. Das Wegintegral einer exakten 1-Form hängt also nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab, nicht aber von dessem Verlauf. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Sei ω zunächst C^1 und $\gamma\colon [a,b] \to V$ eine C^1-Parametrisierung von ω. Dann ist $f \circ \gamma$ ebenfalls stetig differenzierbar, und es gilt

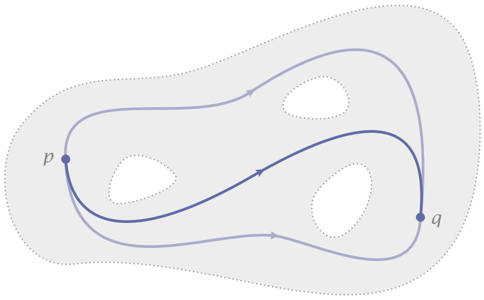
$$\mathrm{d}f(\gamma(t))\dot\gamma(t) = Df(\gamma(t))\gamma'(t) = (f \circ \gamma)'(t).$$

Also ist

$$\begin{aligned}\int_\omega \alpha = \int_\gamma \mathrm{d}f &= \int_a^b \mathrm{d}f(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b (f\circ\gamma)'(t)\,\mathrm{d}t = f\circ\gamma\Big|_a^b = f\Big|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} = f\Big|_{\omega_a}^{\omega_b}.\end{aligned}$$

Abb 5

Verschiedene Wege von p nach q



Mit einer geeigneten Zerlegung in endlich viele Teilintervalle folgt die Behauptung dann auch für stückweise stetig differenzierbare Wege und deren Parametrisierungen. ⟫⟫⟫

Die Wegunabhängigkeit ist somit eine *notwendige* Bedingung für die Exaktheit einer 1-Form. Die 1-Form in Beispiel 4 und die Windungsform υ in Beispiel 5 können deshalb nicht exakt sein.

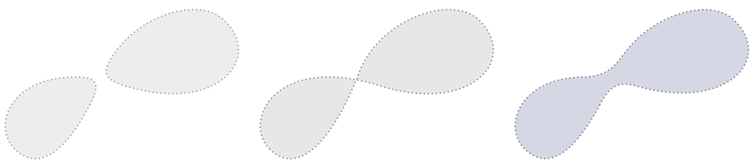
Wir werden gleich sehen, dass umgekehrt diese Bedingung auch *hinreichend* ist, solange wir nur solche Punkte betrachten, die wir auch durch Kurven verbinden können. Dies führt zum Begriff der *wegzusammenhängenden Menge*.

Definition *Eine Teilmenge M von V heißt wegzusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten in M eine ganz in M verlaufende stückweise differenzierbare Kurve gibt, die diese Punkte verbindet.* ⋊

▹ A. Jedes reelle Intervall ist wegzusammenhängend.
B. Jede konvexe Menge ist wegzusammenhängend.
C. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist zusammenhängend für $n \geqslant 2$, nicht aber für $n = 1$.
D. Nur die Menge rechts in Abbildung 6 ist wegzusammenhängend. ◃

Offene *und* wegzusammenhängende Mengen spielen eine wichtige Rolle in der Analysis und haben deshalb eine eigene Bezeichnung.

Abb 6 Zwei nicht und eine zusammenhängende offene Menge



Definition *Ein* Gebiet *ist eine nichtleere, offene und wegzusammenhängende Menge.* ⋊

▷ a. Jedes nichtleere offene Intervall ist ein Gebiet.
b. Jede nichtleere offene konvexe Menge ist ein Gebiet.
c. Die Menge $\Omega_\varepsilon = \{(u,v) : v^2 > u^2 - \varepsilon\}$ ist nur für $\varepsilon > 0$ ein Gebiet.
d. Die Vereinigung zweier Gebiete ist wieder ein Gebiet genau dann, wenn ihr Durchschnitt nicht leer ist. ◁

Das nächste Lemma zeigt, dass hinsichtlich Stammfunktionen die Gebiete in höheren Dimensionen dieselbe Rolle spielen wie die Intervalle in einer Dimension.

8 **Lemma** *Auf einem Gebiet Ω ist eine differenzierbare Abbildung $f : \Omega \to W$ konstant genau dann, wenn Df verschwindet.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ $\Rightarrow$ Das ist trivial, unabhängig davon, ob Ω ein Gebiet ist oder nicht.
$\Leftarrow$ Fixiere einen Punkt $x_0 \in \Omega$ und betrachten einen weiteren Punkt $x \in \Omega$. Es existiert eine stückweise differenzierbare Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ mit

$$\gamma(a) = x_0, \qquad \gamma(b) = x.$$

Dann ist auch $g = f \circ \gamma\colon [a,b] \to W$ stückweise differenzierbar. Da Df nach Voraussetzung überall verschwindet, gilt also auch stückweise

$$g'(t) = Df(\gamma(t))\gamma'(t) = 0.$$

Somit ist g sogar C^1 und wegen $g' = 0$ auch konstant. Also ist $g(a) = g(b)$, was gleichbedeutend ist mit $f(x) = f(x_0)$. Da $x \in \Omega$ beliebig war, ist f konstant auf ganz Ω. ⟩⟩⟩⟩⟩

Auf einem *Gebiet* ist eine differenzierbare Abbildung somit konstant genau dann, wenn ihre Ableitung überall verschwindet 8. Für eine skalare Funktion ist dies gleichbedeutend damit, dass ihr Differenzial verschwindet. Somit gilt folgendes

Korollar *Auf einem Gebiet unterscheiden sich die Stammfunktionen einer exakten 1-Form nur durch eine additive Konstante.* ⋊

Wir zeigen nun, dass auf einem Gebiet die Wegunabhängigkeit von 1-Form-Integralen auch *hinreichend* für die Exaktheit der 1-Form ist.

9 **Satz** *Sei α eine stetige 1-Form auf einem Gebiet Ω. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*
(i) *α ist exakt auf Ω.*
(ii) *Das Wegintegral von α ist unabhängig vom Verlauf des Weges.*

(iii) *Das Wegintegral von α verschwindet für jeden geschlossenen Weg.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ (i) ⇒ (ii) Das ist der Hauptsatz $_7$.

(ii) ⇒ (iii) Ein geschlossener Weg hat denselben Anfangs- und Endpunkt wie ein punktförmiger Weg. Das Wegintegral über einen Punktweg ist aber immer Null. Also gilt dies auch für beliebige geschlossene Wege.

(iii) ⇒ (ii) Seien ω_1 und ω_2 zwei D^1-Wege in Ω mit gleichem Anfangs- und Endpunkt. Bilden wir einen neuen Weg χ, indem wir erst ω_1 und dann ω_2 in umgekehrter Richtung durchlaufen, so erhalten wir einen geschlossenen Weg, für den gilt:

$$0 = \int_\chi \alpha = \int_{\omega_1} \alpha - \int_{\omega_2} \alpha.$$

Das ist gleichbedeutend mit der Behauptung.

(ii) ⇒ (i) Dies ist der wesentliche Teil des Satzes. Da nach Voraussetzung jedes Wegintegral von α nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt, können wir eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) \coloneqq \int_{x_0}^{x} \alpha$$

definieren, indem wir einen beliebigen Punkt $x_0 \in \Omega$ fixieren und das Integral über einen *beliebigen* Weg in Ω von x_0 nach x bilden. Zu zeigen ist, dass dies eine Stammfunktion von α definiert.

Betrachte $x \in \Omega$. Für alle hinreichend kleinen h liegt $[x, x+h]$ ganz in Ω, und aufgrund der Wegunabhängigkeit des Integrals ist

$$f(x+h) - f(x) = \int_{x_0}^{x+h} \alpha - \int_{x_0}^{x} \alpha = \int_{[x,x+h]} \alpha.$$

Parametrisieren wir $[x, x+h]$ durch $t \mapsto x + th$ mit $0 \leqslant t \leqslant 1$, so folgt

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 \alpha(x+th)h \,\mathrm{d}t.$$

Subtrahieren wir $\alpha(x)h$, so erhalten wir

$$f(x+h) - f(x) - \alpha(x)h = \int_0^1 [\alpha(x+th) - \alpha(x)]\, h \,\mathrm{d}t.$$

Aufgrund der Stetigkeit von α ist aber $[\alpha(x+th) - \alpha(x)]\, h = o(h)$, also

$$f(x+h) = f(x) + \alpha(x)h + o(h).$$

Somit ist f im Punkt x total differenzierbar, und es gilt

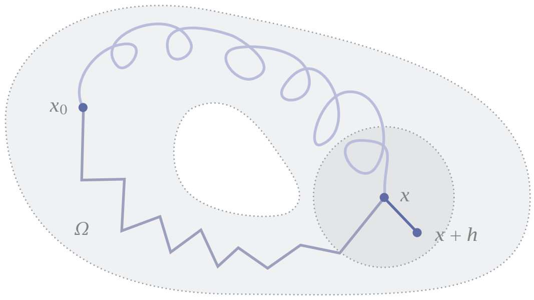
$$\mathrm{d}f(x)h = Df(x)h = \alpha(x)h.$$

Somit ist $\mathrm{d}f = \alpha$, was zu zeigen war. ⟩⟩⟩⟩⟩

19.14

Abb 7

Definition von $\int_{x_0}^{x} \alpha$



19.4 Lokal exakte 1-Formen

Der letzte Satz $_9$ charakterisiert exakte 1-Formen eindeutig über die Wegunabhängigkeit. Doch ist das Kriterium wenig praktikabel, da man nicht alle Wegintegrale überprüfen kann. Dagegen ist es leicht, eine *notwendige* Bedingung zu formulieren.

10 **Integrabilitätsbedingung** *Ist eine 1-Form $\alpha = \sum_{k=1}^{n} a_k \, \mathrm{d}x_k$ exakt und stetig differenzierbar, so erfüllen ihre Koeffizienten die Integrabilitätsbedingung*

$$\partial_l a_k = \partial_k a_l, \qquad 1 \leqslant k, l \leqslant n. \quad ⋊$$

⟪⟪ Nach Voraussetzung ist

$$\alpha = \mathrm{d}f = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f \, \mathrm{d}x_k$$

mit einer stetig differenzierbar Funktion f. Ist α stetig differenzierbar, so sind alle partiellen Ableitungen von f nochmals stetig differenzierbar. Somit ist f sogar C^2, und mit dem Lemma von Schwarz $_{14.18}$ gilt

$$\partial_l a_k = \partial_l(\partial_k f) = \partial_k(\partial_l f) = \partial_k a_l, \qquad 1 \leqslant k, l \leqslant n. \quad ⟫⟫$$

Definition *Eine stetig differenzierbare 1-Form heißt geschlossen, wenn sie die Integrabilitätsbedingungen $_{10}$ erfüllt.* ⋊

Korollar *Jede stetig differenzierbare exakte 1-Form ist geschlossen.* ⋊

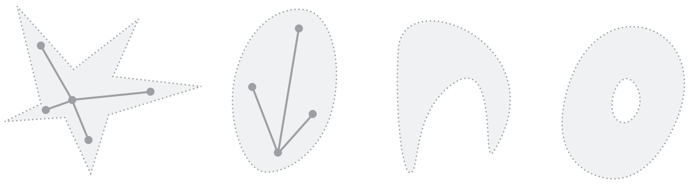
11 ⊳ A. Auf dem $\mathbb{R}^2$ ist $u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y$ geschlossen, falls $\partial_y u = \partial_x v$.

B. Somit ist $y^2\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$ nicht geschlossen, da $\partial_y(y^2) = 2y \neq 0 = \partial_x(1)$.

C. Die Windungsform υ $_5$ ist geschlossen, denn

$$\partial_x\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \partial_y\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Abb 8 Sternförmige und nicht sternförmige Mengen



D. Auf dem $\mathbb{R}^3$ ist $\alpha = u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y + w\,\mathrm{d}z$ geschlossen, falls

$$\partial_y w = \partial_z v, \qquad \partial_z u = \partial_x w, \qquad \partial_x v = \partial_y u.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\nabla \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{pmatrix} = 0.$$

Man nennt dies auch die *Rotation* des Vektorfelds $(u, v, w)^\top$. ◁

▪ Das Lemma von Poincaré

Die Frage stellt sich, ob umgekehrt jede geschlossene 1-Form exakt ist. Die Antwort hierauf hat einen lokalen und einen globalen Aspekt. Lokal ist dies immer der Fall, wenn das Definitionsgebiet folgende geometrische Gestalt hat.

Definition *Eine Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, wenn es einen Punkt $m \in M$ gibt, so dass $[m, x] \subset M$ für alle $x \in M$. Jeder solche Punkt m heißt ein Zentrum von M.* ⋊

Jede sternförmige Menge ist wegzusammenhängend, aber natürlich ist nicht jede wegzusammenhängende Menge sternförmig – siehe Abbildung 8.

▷ A. Jedes Intervall ist sternförmig bezüglich jedes seiner Punkte.
B. Die geschlitzte Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus (0, \infty)$ ist sternförmig mit Zentrum 0.
C. Die gepunktete Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist *nicht* sternförmig.
D. Die Sphären $\mathbb{S}^n$, $n \geqslant 0$, sind *nicht* sternförmig.
E. Eine Menge ist sternförmig bezüglich jedes ihrer Punkte genau dann, wenn sie konvex ist. ◁

12 **Lemma von Poincaré** *Jede geschlossene 1-Form auf einem sternförmigen Gebiet ist exakt.* ⋊

19.16

Zunächst eine Vorüberlegung. *Falls* $\alpha = \mathrm{d}f$, also

$$\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\,\mathrm{d}x_k = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(x)\,\mathrm{d}x_k,$$

so gilt auch

$$\alpha(tx)x = \sum_{k=1}^{n} a_k(tx)x_k = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(tx)x_k = \partial_t f(tx).$$

Somit können wir f aus α rekonstruieren, indem wir $\alpha(tx)x$ über $[0,1]$ integrieren. Diese Beobachtung ist die Grundlage des folgendes Beweises.