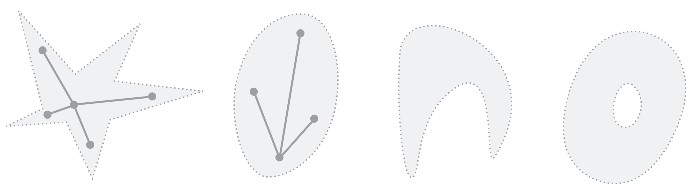
Abb 8 Sternförmige und nicht sternförmige Mengen



Das Lemma von Poincaré

Die Frage stellt sich, ob umgekehrt jede geschlossene 1-Form exakt ist. Die Antwort hierauf hat einen lokalen und einen globalen Aspekt. Lokal ist dies immer der Fall, wenn das Definitionsgebiet folgende geometrische Gestalt hat.

Definition *Eine Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, wenn es einen Punkt $m \in M$ gibt, so dass $[m, x] \subset M$ für alle $x \in M$. Jeder solche Punkt m heißt ein Zentrum von M.* ⋊

Jede sternförmige Menge ist wegzusammenhängend, aber natürlich ist nicht jede wegzusammenhängende Menge sternförmig – siehe Abbildung 8.

A. Jedes Intervall ist sternförmig bezüglich jedes seiner Punkte.
B. Die geschlitzte Ebene $\mathbb{R}^2 \smallsetminus (0, \infty)$ ist sternförmig mit Zentrum 0.
C. Die gepunktete Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist *nicht* sternförmig.
D. Die Sphären $\mathbb{S}^n$, $n \geqslant 0$, sind *nicht* sternförmig.
E. Eine Menge ist sternförmig bezüglich jedes ihrer Punkte genau dann, wenn sie konvex ist.

12 **Lemma von Poincaré** *Jede geschlossene 1-Form auf einem sternförmigen Gebiet ist exakt.* ⋊

Zunächst eine Vorüberlegung. *Falls* $\alpha = \mathrm{d}f$, also

$$\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\,\mathrm{d}x_k = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(x)\,\mathrm{d}x_k,$$

so gilt auch

$$\oe\alpha(tx)x = \sum_{k=1}^{n} a_k(tx)x_k = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(tx)x_k = \partial_t f(tx).$$

Somit können wir f aus α rekonstruieren, indem wir $\alpha(tx)x$ über $[0,1]$ integrieren. Diese Beobachtung ist die Grundlage des folgendes Beweises.

‹‹‹‹ *Beweis des Lemmas von Poincaré* Sei α eine geschlossene 1-Form auf einer offenen sternförmigen Menge Ω. Durch Translation der Koordinaten können wir erreichen, dass Ω sternförmig bezüglich 0 ist. Dann ist

$$f(x) = \int_0^1 \alpha(tx)x\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{l=1}^{n} a_l(tx)x_l\,\mathrm{d}t$$

für jedes $x \in \Omega$ wohldefiniert, denn der Integrationsweg $[0, x]$ ist in Ω enthalten und die Koeffizienten von α sind stetig differenzierbar auf Ω. Also definiert dies eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Da die Koeffizienten a_k in jeder Variablen x_k stetig differenzierbar sind, ist es auch f 14.19, und wir erhalten $\partial_k f$ durch Differenziation unter dem Integral. Es gilt also

$$\begin{aligned}\partial_k f(x) &= \int_0^1 \sum_{l=1}^{n} \partial_k(a_l(tx)x_l)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \Big(a_k(tx) + t\sum_{l=1}^{n} \partial_k a_l(tx)x_l\Big)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Aufgrund der Integrabilitätsbedingung ist aber $\partial_k a_l = \partial_l a_k$, und weiter ist

$$a_k(tx) + t\sum_{l=1}^{n} \partial_l a_k(tx)x_l = \partial_t(ta_k(tx)).$$

Also erhalten wir insgesamt

$$\partial_k f(x) = \int_0^1 \partial_t(ta_k(tx))\,\mathrm{d}t = ta_k(tx)\Big|_0^1 = a_k(x).$$

Das war zu zeigen. ››››

Auf sternförmigen Gebieten ist jede geschlossene 1-Form also exakt. Dies können sehr große Gebiete sein. Auf jeden Fall schließt es aber kleine Umgebungen eines jeden Punktes ein. Somit erhalten wir folgendes lokales Resultat.

Korollar *Jede geschlossene 1-Form ist lokal exakt.* ⋊

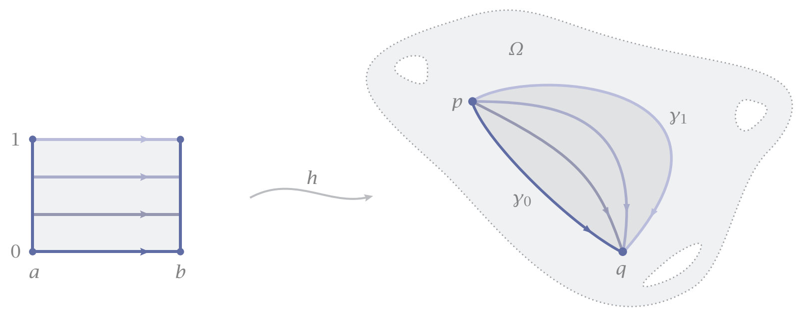
Die Frage, wann aus der lokalen auch die globale Exaktheit folgt, betrachten wir im nächsten Abschnitt.

19.5 Global exakte 1-Formen

Eine geschlossene und damit lokal exakte 1-Form ist nicht notwendigerweise auch global exakt. Zum Beispiel ist die Windungsform υ 5 geschlossen 11 und

19.18

Abb 9 Homotopie von γ_0 und γ_1 in Ω



daher *lokal* exakt. Sie ist aber *nicht global* exakt, da ihr Integral längs dem geschlossenen Einheitskreis nicht Null ist $_5$.

Wir wissen bereits, dass notwendig und hinreichend für die Exaktheit einer Form die Unabhängigkeit ihrer Wegintegrale vom *Verlauf* der Wege ist $_9$. Als Erstes stellen wir nun fest, dass dies für lokal exakte Formen jedenfalls immer dann gilt, wenn diese Wege ineinander deformiert werden können. Hierzu benötigen wir den Begriff der *Homotopie* von Kurven.

Definition *Zwei stetige Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a,b] \to \Omega$ mit gemeinsamen Anfangspunkt p und Endpunkt q heißen homotop in Ω, wenn es eine stetige Abbildung*

$$h \colon [0,1] \times [a,b] \to \Omega, \quad (s,t) \mapsto h(s,t) =: h_s(t),$$

gibt, so dass

$$h_0 = \gamma_0, \qquad h_1 = \gamma_1$$

sowie $h_s(a) = p$ und $h_s(b) = q$ für alle $0 \leqslant s \leqslant 1$. ⋊

Für jedes $s \in [0,1]$ ist also h_s eine stetige Kurve von p nach q innerhalb von Ω, die für $s = 0$ mit γ_0 und für $s = 1$ mit γ_1 übereinstimmt. Da h auch stetig in s ist, erhalten wir eine stetige Deformation der Kurve γ_0 in die Kurve γ_1, wobei die Endpunkte fixiert sind. Wichtig ist, dass diese Homotopie ganz in Ω verläuft. Die Kurven γ_s dürfen nicht über ›Löcher‹ in Ω hinweggezogen werden – siehe Abbildung 9.

▹ Sind $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a,b] \to \Omega$ zwei Kurven in Ω mit gemeinsamen Anfangs- und Endpunkt, und gilt

$$[\gamma_0(t), \gamma_1(t)] \subset \Omega, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

so sind sie homotop mittels der Homotopie $h\colon [0,1]\times[a,b]\to\Omega$ mit

$$h(s,t)=(1-s)\gamma_0(t)+s\gamma_1(t).$$

Da wir entlang den Kurven in einer Homotopie integrieren wollen, benötigen wir noch etwas mehr als nur die Stetigkeit.

Definition *Zwei Kurven $\gamma_0,\gamma_1\colon [a,b]\to\Omega$ mit gleichem Anfangs- und Endpunkt sind D^1-homotop, wenn es eine Homotopie $h\colon [0,1]\times[a,b]\to\Omega$ dieser Kurven gibt, die auf jedem horizontalen oder vertikalen Schnitt des Rechtecks $[0,1]\times[a,b]$ stückweise stetig differenzierbar ist.*

Ein *horizontaler Schnitt* ist hierbei eine Teilmenge

$$\{s\}\times[a,b]\subset[0,1]\times[a,b].$$

Entsprechend sind vertikale Schnitte erklärt.

Homotopiesatz *Sei α eine lokal exakte 1-Form auf Ω. Sind γ_0 und γ_1 zwei D^1-homotope Kurven in Ω, so gilt*

$$\int_{\gamma_0}\alpha=\int_{\gamma_1}\alpha.$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $Q=[0,1]\times[a,b]$ und $h\colon Q\to\Omega$ eine D^1-Homotopie von γ_0 und γ_1 in Ω. Zuerst zeigen wir, dass sich Q so in *endlich viele* achsenparallele Rechtecke zerlegen lässt, dass α auf dem Bild jedes dieser Rechtecke exakt ist.

Angenommen, dies ist *nicht* möglich. Dann können wir eine fallende Folge abgeschlossener Rechtecke $Q\supset Q_1\supset Q_2\supset ..$ konstruieren, jedes ein Viertel so groß wie das vorangehende, so dass α auf dem Bild von Q_k keine Stammfunktion besitzt. Der Durchschnitt aller Q_k ist dann ein Punkt $r\in Q$. Nach dem Lemma von Poincaré $_{12}$ ist aber α in einer offenen Umgebung U von $h(r)$ exakt. Diese Umgebung enthält aber die Bilder der Q_k mit k hinreichend groß. Somit erhalten wir einen Widerspruch.

Es gibt somit Teilungen $(s_1,..,s_m)$ von $[0,1]$ und $(t_1,..,t_n)$ von $[a,b]$ so, dass α in einer Umgebung des Bildes jedes Rechtecks

$$Q_{ik}=[s_{i-1},s_i]\times[t_{k-1},t_k],\qquad 1\leqslant i\leqslant m,\quad 1\leqslant k\leqslant n,$$

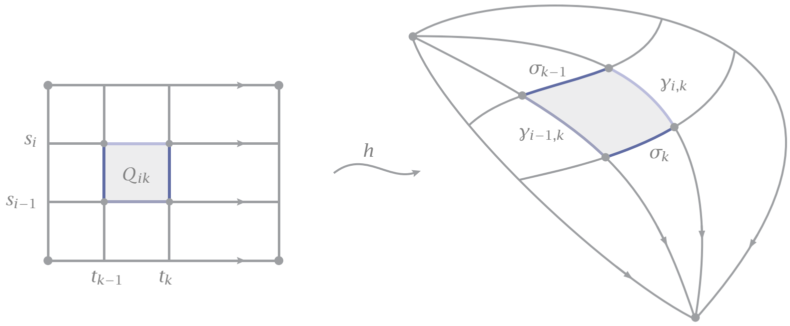
exakt ist. Wir zeigen nun, dass die Integrale entlang der Kurven $\gamma_i\coloneqq h_{s_i}$ für sukzessive Teilungspunkte unverändert bleiben, also

$$\int_{\gamma_{i-1}}\alpha=\int_{\gamma_i}\alpha,\qquad 1\leqslant i\leqslant m,$$

gilt. Daraus folgt dann die Behauptung. — Betrachte dazu die Kurvenabschnitte

$$\gamma_{i,k}=h(s_i,\cdot)\Big|_{[t_{k-1},t_k]},\qquad 1\leqslant k\leqslant n,$$

Abb 10 Zum Beweis des Homotopiesatzes



sowie die Verbindungskurven

$$\sigma_k = h(\cdot, t_k)\Big|_{[s_{i-1}, s_i]}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Diese sind sämtlich stückweise stetig differenzierbar, es gilt

$$\gamma_{i-1,k} + \sigma_k = \sigma_{k-1} + \gamma_{i,k},$$

und gemeinsam bilden diese Kurven den Rand des Bildes des Rechtecks Q_{ik} unter h. Nach Konstruktion ist α exakt in einer Umgebung dieser Menge, und daher das Wegintegral entlang beider Kurven gleich. Es gilt also

$$\int_{\gamma_{i-1,k}} \alpha + \int_{\sigma_k} \alpha = \int_{\sigma_{k-1}} \alpha + \int_{\gamma_{i,k}} \alpha.$$

Da dies für jedes $1 \leqslant k \leqslant n$ gilt, ergibt Aufsummieren über k und Kürzen der Integrale über $\sigma_1, .., \sigma_{m-1}$ die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_{i-1,k}} \alpha + \int_{\sigma_m} \alpha = \int_{\sigma_0} \alpha + \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_{i,k}} \alpha. \tag{2}$$

Die Integrale über σ_0 und σ_n sind aber Null, da es sich um Punktkurven handelt. Also folgt

$$\int_{\gamma_{i-1}} \alpha = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_{i-1,k}} \alpha = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_{i,k}} \alpha = \int_{\gamma_i} \alpha.$$

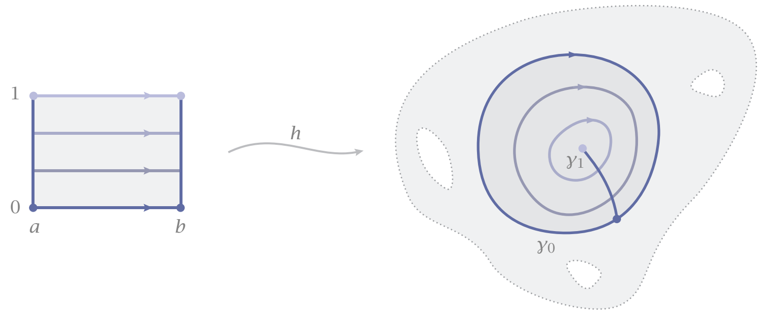
Der Homotopiesatz gilt für beliebige D^1-homotope Kurven mit festem Anfangs- und Endpunkt. Für *geschlossene* Kurven kann man aber diese letzte Forderung fallen lassen. Dies führt zum Begriff der *freien Homotopie*.

Definition *Zwei geschlossene Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a,b] \to \Omega$ heißen frei homotop in Ω, wenn es eine stetige Abbildung*

$$h \colon [0,1] \times [a,b] \to \Omega, \quad (s,t) \mapsto h(s,t) = h_s(t),$$

19.21

Abb 11 Freie Homotopie von γ_0 zu einer Punktkurve γ_1



gibt, so dass

$$h_0 = \gamma_0, \qquad h_1 = \gamma_1$$

sowie $h(s,a) = h(s,b)$ *für alle* $0 \leqslant s \leqslant 1$. ⋊

Alle Kurven h_s der Homotopie verlaufen also in Ω und sind geschlossen. *Frei D^1-homotope Kurven* sind analog zu D^1-homotope Kurven definiert.

13 **Freier Homotopiesatz** *Sei α eine lokal exakte 1-Form auf Ω. Sind γ_0 und γ_1 zwei geschlossene, in Ω frei D^1-homotope Kurven, so gilt*

$$\int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha. \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Der Beweis ist identisch mit dem letzten Beweis, bis auf die Bemerkung über die σ-Integrale in (2). Diese sind nicht Null, sondern *gleich*. Die Folgerung hieraus gilt also ebenfalls. ⟩⟩⟩⟩⟩

Ein wichtiger Spezialfall dieses Satzes ergibt sich für *nullhomotope Kurven*. Dies sind geschlossene Kurven, die frei homotop zu einer Punktkurve sind. Da das Kurvenintegral einer beliebigen 1-Form über eine Punktkurve verschwindet, erhalten wir folgenden

14 **Satz** *Ist α eine lokal exakte 1-Form auf Ω, so ist*

$$\int_\gamma \alpha = 0$$

für jede in Ω D^1-nullhomotope Kurve γ. ⋊

Wir kommen nun zurück zu der Frage, wann eine lokal exakte 1-Form auch global exakt ist. Wir wissen bereits, dass dies genau dann der Fall ist, wenn ihr Wegintegral entlang jedes geschlossenen Weges verschwindet $_9$. Aufgrund

Abb 12 Einfach zusammenhängende Menge, und nicht

des letzten Satzes ist dies sicher immer dann der Fall, wenn jede geschlossene Kurve nullhomotop ist. Dies ist nun eine rein topologische Frage und betrifft ausschließlich die Geometrie des Gebietes.

Definition *Eine wegzusammenhängende Teilmenge M in $\mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve in M nullhomotop ist.*

A. Eine sternförmige Menge ist einfach zusammenhängend, denn jede geschlossene Kurve lässt sich frei homotop zu einem Zentrum zusammenziehen.
B. Die Sphären $\mathbb{S}^n$ sind einfach zusammenhängend für $n \geqslant 2$.
C. Der punktierte Raum $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist einfach zusammenhängend.
D. Die punktierte Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist *nicht* einfach zusammenhängend.
E. Ebensowenig ist die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ einfach zusammenhängend.
F. Der Raum $\mathbb{R}^3$ ohne eine der Koordinatenachsen ist ebenfalls nicht einfach zusammenhängend.

15 **Satz** *Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet Ω ist jede lokal exakte 1-Form auch global exakt. Insbesondere gilt*

$$\int_\gamma \alpha = 0$$

für jede geschlossene D^1-Kurve in Ω.

Das Wegintegral einer lokal exakten 1-Form entlang eines beliebigen geschlossenen Weges ist invariant unter freien Homotopien. In einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist jede solche Kurve nullhomotop, und damit jedes solche Wegintegral Null. Also ist die lokal exakte 1-Form auch global exakt $_9$.

Bemerkung Der letzte Satz bietet auch eine Möglichkeit zu zeigen, dass ein Gebiet *nicht* einfach zusammenhängend ist. Dies ist der Fall, wenn das Wegintegral einer geschlossenen 1-Form entlang eines einzigen geschlossenen Weges *nicht* Null ist. Eine geeignete 1-Form hierfür ist meist die Windungsform υ $_5$.

Als letzten Satz erwähnen wir eine Anwendung aus der klassischen Mechanik. Tatsächlich standen solche Anwendungen am Anfang der Entwicklung des Kalküls der Wegintegrale.

19.24 **Satz** *Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet im $\mathbb{R}^3$ ist jedes stetig differenzierbare Vektorfeld V mit $\nabla \times V = 0$ ein Gradientenfeld, also*

$$V = \nabla U$$

mit einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion U. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Die Bedingung $\nabla \times V = 0$ ist gleichbedeutend damit, dass die dem Vektorfeld V mittels des Standardskalarprodukts zugeordnete 1-Form α_V geschlossen ist 11. Also ist α_V lokal exakt. Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist sie dann auch global exakt 15. Es gibt also eine stetig differenzierbare Funktion U mit $\mathrm{d}U = \alpha_V$. Dies ist aber gleichbedeutend mit

$$\nabla U = V.$$

Da außerdem V C^1 ist, ist U selbst C^2. ⟩⟩⟩⟩