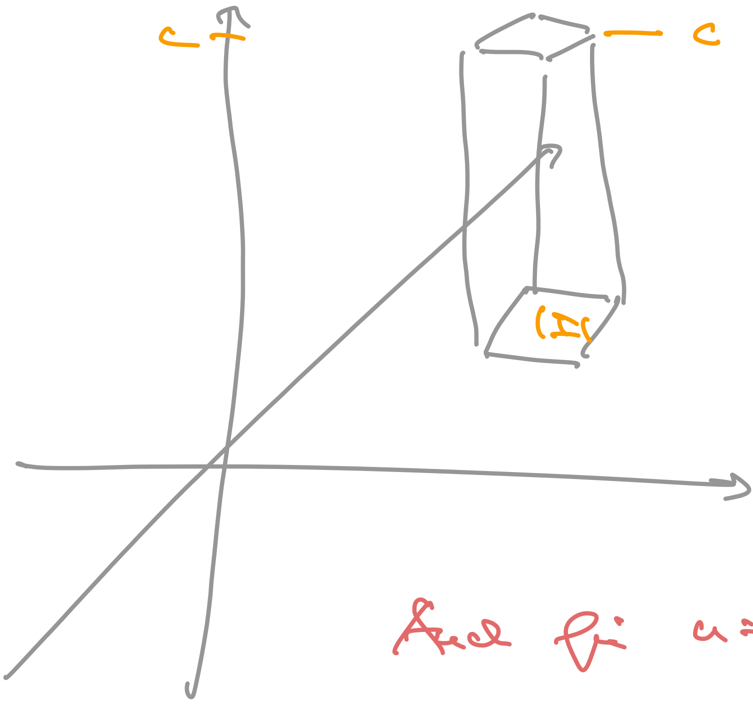
8. Vorlesung 17.11.2021



$c \cdot |I|$

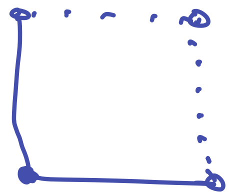
statt $|I|$ nehmen $\mu(I)$.

Auch für $n = 1$ sinnvoll.

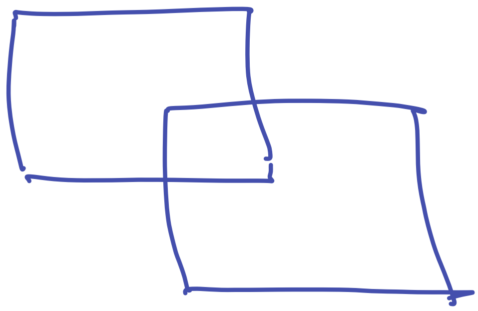
Bsp für 2-Intervalle

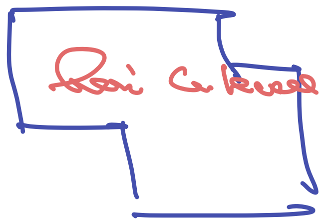
$\{0\} \times \{0\}$

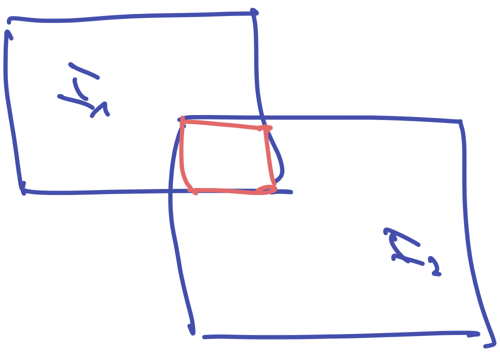
$[0,1) \times \{0\}$



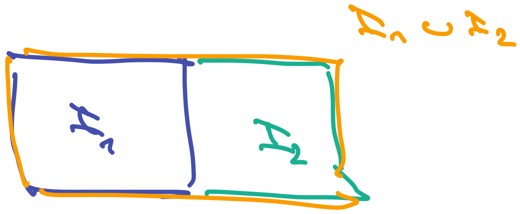
$[0,1) \times [0,1)$







$I_1 \cap I_2 =$ 

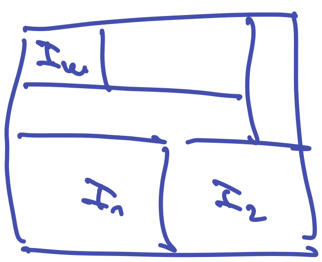


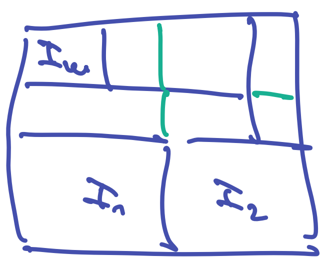
Beweis: $\emptyset \in J$,

$$\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

$\Longrightarrow$ additiv

$$\left.\begin{aligned}\mu(\emptyset \cup \emptyset) &= \mu(\emptyset) \\ &= \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset)\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \mu(\emptyset) = 0.$$





Bew.: $\Rightarrow$ μ sei monoton.

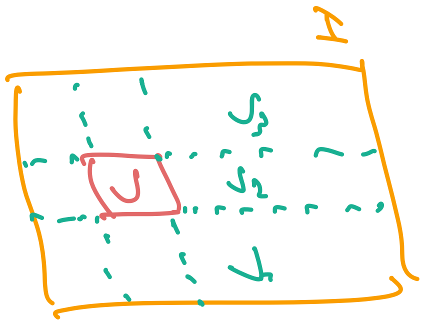
Sei $I \in \mathcal{J}^n$. Dann $\emptyset \subset I$

$$\Rightarrow \underbrace{\mu(\emptyset)}_{=0} \le \mu(I).$$

$$\Rightarrow \mu(I) \ge 0, \quad I \in \mathcal{J}^n.$$

$\Leftarrow$ Sei μ nichtnegativ.

Sei $J \subset I$ in $\mathcal{J}^n$.



Dann:

$$I \setminus J = \underbrace{J_1 \cup \ldots \cup J_m}_{\text{disjunkt}}, \text{ in } \mathcal{J}^n$$

Also:

$$I = \underbrace{J \cup J_1 \cup \ldots \cup J_m}_{\text{disjunkt}}$$

$$\xRightarrow{\text{Add.}} \mu(I) = \mu(J) + \underbrace{\mu(J_1)}_{\ge 0} + \ldots + \underbrace{\mu(J_m)}_{\ge 0} \ge \mu(J) \qquad \boxtimes$$

Pf: When μ monotone, then

since
$$\mu(A) \le \mu(A^*), \quad A \subset A^*$$

we also have
$$\mu(A^*) \le \mu(A) + \varepsilon$$

Then
$$|\mu(A) - \mu(A^*)| \le \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Beispiele:

1. Sei $|\cdot|$ euklidische Länge eindim. Intervallen

Für $I = I^1 \times .. \times I^n \in \mathcal{J}^n$:

$$\lambda_n(I) = \lambda_n(I^1 \times .. \times I^n)$$

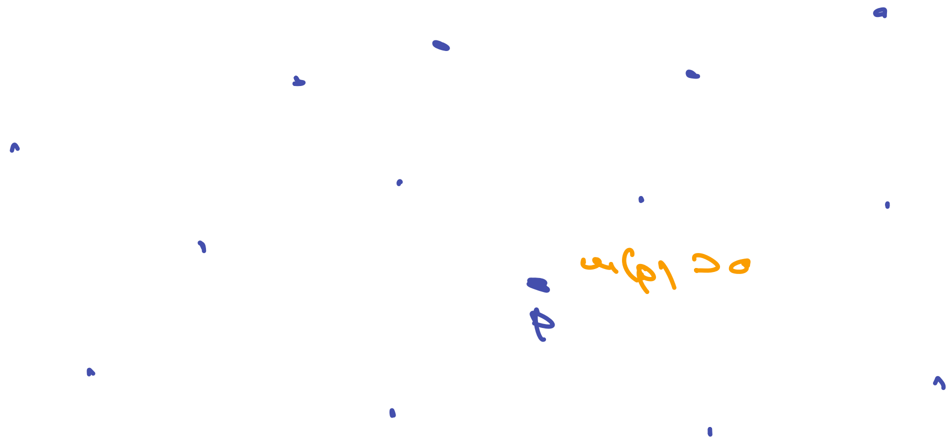
$$= \prod_{1 \leq k \leq n} \underbrace{|I^k|}_{< \infty} < \infty$$

Volumenmaß λ_n auf $\mathbb{R}^n$

$n = 1$: Längenmaß

$n = 2$: Flächenmaß .

2. Sei $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ diskret



Sei

$$m : \Lambda \longrightarrow [0, \infty] \qquad \text{„Massenpunkt"}$$
$$p \longmapsto m(p)$$

Für $I \in \mathcal{J}$:

$$m(I) := \sum_{p \in \underbrace{I \cap \Lambda}_{\text{endliche Menge}}} m(p) \;, \; < \infty$$

Ü : z.B.

3. Spezialfall:

$$\nu : \Lambda \to \{1\}$$

Dann

$$\underline{\nu(I)} = \sum_{p \in I \cap \Lambda} \nu(p)$$

$$= \sum_{p \in I \cap \Lambda} 1 = \underline{\mathrm{card}(I \cap \Lambda)}$$

ν Zählmaß $< \infty$

4. Zählmaße auf $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$:

Reihe als Lebesgueintegrale

5. Lebesgue – Stieltjes – Maß:

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton steigend

Verteilungsfkt.

Auf $\mathcal{J}^1$:

$$\mu_\varphi([a,b]) := \varphi_+(b) - \varphi_-(a)$$

$$\mu_\varphi((a,b]) := \varphi_+(b) - \varphi_+(a)$$

$$\vdots \qquad \qquad \ldots$$

$$\mu_\varphi((a,b)) := \varphi_-(b) - \varphi_+(a)$$

Wenn s eine Sprungstelle von φ:

$$\varphi_+(s) - \varphi_-(s) > 0 \; :$$

Dann:

$$\mu_\varphi(\{s\}) = \varphi_+(s) - \varphi_-(s) > 0 .$$

6. Seien μ_r auf $\mathbb{R}^r$

μ_s auf $\mathbb{R}^s$

Produktmaß

$$\mu_{r,s} = \mu_r \times \mu_s \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^{r+s}.$$

Sei $I \in \mathcal{J}^{r+s}$:

$$I = \underbrace{I^1 \times \dots \times I^r}_{} \times \underbrace{I^{r+1} \times \dots \times I^{r+s}}_{}$$

$$= \underset{\in \mathcal{J}^r}{I_r} \times \underset{\in \mathcal{J}^s}{I_s}$$

Definiere

$$\mu_{r,s}(I) := \mu_{r,s}(I_r \times I_s)$$

$$= \mu_r(I_r) \cdot \mu_s(I_s).$$

z.B. Lebesguemaß:

$$\lambda_2 = \lambda_1 \times \lambda_1$$

$$\lambda_3 = \lambda_2 \times \lambda_1 = \lambda_1 \times \lambda_1 \times \lambda_1$$

7. Sei $A \in \mathcal{J}^n$ mit $\lambda_n(A) > 0$.

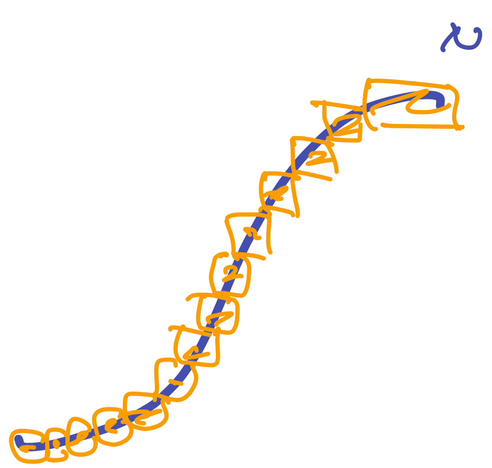
Dann:

$$\lambda_A(I) := \frac{\lambda_n(I \cap A)}{\lambda_n(A)}, \quad I \in \mathcal{J}^n.$$

relative Volumenmaß λ_A.

Für jedes $I \in \mathcal{J}^n$ mit $I \supset A$: $\lambda_A(I) = 1$.

Bsp in $\mathbb{R}^2$



Bem.

1. $N \subset \mathbb{R}^n$ ist völlig beliebig. Kann auch unbeschränkt [illegible]

2. Kann N beliebig [illegible] [illegible] in [illegible] [illegible], so dass ...

   und Bsp.

3. Jede Teilmenge einer Nullmenge ist auch eine Nullmenge.

4. Es reicht immer nur [illegible] zu ..., als N eine Nullmenge.

Beweis: Sei $(N_n)_{n\geq 1}$ Folge von μ-Nullmengen.

Sei
$$N = \bigcup_{n\geq 1} N_n .$$

Sei $\varepsilon > 0$.

Dann ex. zu jedem $k \geq 1$ eine Folge $(I_{k,l})_{l\geq 1}$ mit

$$N_k \subset \bigcup_{l\geq 1} I_{k,l} ,$$

$$\sum_{l\geq 1} \mu(I_{k,l}) < \frac{\varepsilon}{2^k} .$$

Dann $(I_{k,l})_{k,l\geq 1}$ wir erhalten,

$$N = \bigcup_{k\geq 1} N_k \subset \bigcup_{k\geq 1}\left(\bigcup_{l\geq 1} I_{k,l}\right)$$
$$= \bigcup_{k,l\geq 1} I_{k,l}$$

und

$$\sum_{k,l\geq 1} \mu(I_{k,l}) = \sum_{k\geq 1}\left(\sum_{l\geq 1} \mu(I_{k,l})\right)$$
$$< \sum_{k\geq 1} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon .$$

$\boxed{}$

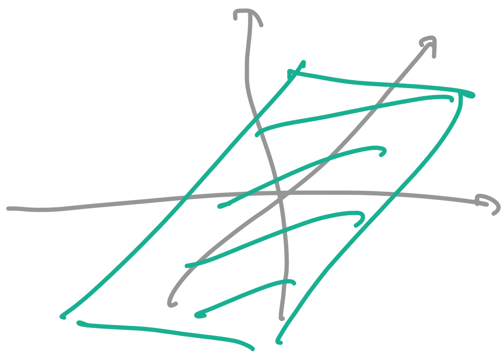
Bsp:

1. Jedes $I \in \mathcal{J}^n$ mit $\mu(I) = 0$ ist eine μ-Nullmenge.

2. λ_n: Jede endliche oder abzählbare Punktmenge ist λ_n-N.

3. λ_n: $\mathbb{Q}$ ist λ_n-Nullmenge.

4. Jede Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ ist eine λ_n-Nullmenge.



5. Stetige Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Graph ist eine λ_2-Nullmenge.

6. m beliebige Massenverteilung auf diskreter Menge $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\mu(I) := \sum_{p \in I \cap A} m(p)$$

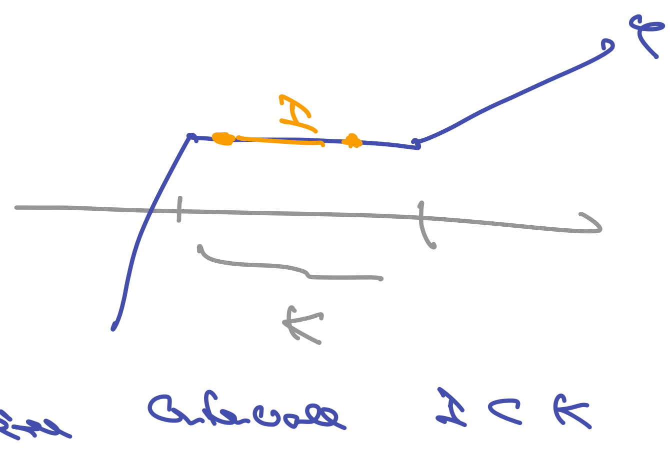
Dann jede Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$N \cap A = \emptyset$$

eine μ-Nullmenge.

7. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei monoton $\rightsquigarrow \mu_\varphi$.

Ist φ konstant auf Intervall K:



Dann jedes Intervall $I \subset K$ eine μ_φ-Nullmenge.

Beweis:

$\Longrightarrow$ Sei N eine Nullmenge.

Dann ex. zu jedem $k \geq 1$ eine

Überdeckung $(I_{k,\ell})_{\ell \geq 1}$ mit

$$\bigcup_{\ell \geq 1} I_{k,\ell} \supset N,$$

$$\sum_{\ell \geq 1} \mu(I_{k,\ell}) < \frac{1}{2^k}.$$

Dann $(I_{k,\ell})_{k,\ell \geq 1}$ abzählbare Überdeckung,

$$\sum_{k,\ell} \mu(I_{k,\ell}) \leq \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} = 1 < \infty$$

und jeder Punkt in N wird ∞ oft überdeckt.

$\Leftarrow$ Sei $(I_n)_{n \geq 1}$ eine solche Überdeckung.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. K:

$$\sum_{n \geq K} \mu(I_n) < \varepsilon$$

und $(I_n)_{n \geq K}$ ist eine weitere Überdeckung von N. $\square$

Bsp:

$f =_\mu g$ "$f = g$ μ-fast überall",

wenn es μ-Nullmenge N $\subset \mathbb{R}^n$:

$$f|_{\mathbb{R}^n \setminus N} = g|_{\mathbb{R}^n \setminus N}.$$

Aufg:

$f \leq_\mu g$

$f \geq_\mu g$