

20

Das Lebesgueintegral

Wir erklären nun das *Lebesgueintegral* für Funktionen

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dabei gehen wir wie beim Cauchyintegral vor, indem wir das Integral zuerst für Treppenfunktionen definieren. Dabei genügt es, Maße für Intervalle zu betrachten. Eine allgemeine Maßtheorie wird nicht benötigt.

Dieses Integral wird auf solche nichtnegativen Funktionen ausgedehnt, die sich *punktweise* von unten durch Treppenfunktionen approximieren lassen. Dabei spielt gleichmäßige Konvergenz keine Rolle. Lassen wir auch den Wert ∞ zu, so ist das Integral für *jede* solche Funktion erklärt. Erst im dritten Schritt wird das Integral für allgemeine Funktionen als Differenz der Integrale ihres Positiv- und Negativteils erklärt. Diese Teilintegrale müssen allerdings endlich sein, damit deren Differenz wohldefiniert und endlich ist.

Das Lebesgueintegral ist von vornherein auf dem ganzen \mathbb{R}^n erklärt. Das Integral über messbare Teilmengen erhält man hieraus durch Multiplikation mit deren charakteristischen Funktionen. Es gibt daher kein uneigentliches Lebesgueintegral, vielmehr ist das »eigentliche Integral« ein Spezialfall des allgemeinen Lebesgueintegrals.

Die besondere Bedeutung des Lebesgueintegrals für die Analysis liegt darin, dass es mit Grenzübergängen unter sehr allgemeinen Bedingungen vertauscht.

20.1

Intervallfunktionen

Ein *Intervall* im \mathbb{R}^n oder kurz *n-Intervall* ist das kartesische Produkt

$$I = I^1 \times \dots \times I^n$$

aus n reellen Intervallen I^1, \dots, I^n .¹ Diese können offen, einseitig offen, abgeschlossen, beschränkt, unbeschränkt, zu einem Punkt entartet oder leer sein. Sind sie *alle* offen respektive abgeschlossen respektive beschränkt respektive kompakt, so ist es auch ihr Produkt. Ist dagegen *ein* reelles Intervall I^j entartet respektive leer, so ist auch das Produkt I entartet respektive leer.

Die Vereinigung zweier n -Intervalle ist im Allgemeinen kein n -Intervall. Für Durchschnitte gilt jedoch folgendes Lemma, dessen Beweis als Übung überlassen wird.

- 1 **Lemma** Ist $(I_k)_{k \geq 1}$ eine Folge beliebiger n -Intervalle, so ist auch deren Durchschnitt ein n -Intervall. \times

■ Intervallfunktionen

Sei \mathcal{J}^n die Familie aller *beschränkten* n -Intervalle. Unbeschränkte Intervalle bleiben also außen vor.

Definition Eine *Intervallfunktion* ist eine Funktion $\mu: \mathcal{J}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Diese heißt

- (i) *additiv*, wenn für alle $I_1, I_2 \in \mathcal{J}^n$

$$I_1 \cap I_2 = \emptyset \wedge I_1 \cup I_2 \in \mathcal{J}^n \Rightarrow \mu(I_1 \cup I_2) = \mu(I_1) + \mu(I_2),$$

- (ii) *monoton*, wenn für alle $I_1, I_2 \in \mathcal{J}^n$

$$I_1 \subset I_2 \Rightarrow \mu(I_1) \leq \mu(I_2),$$

- (iii) *regulär*, wenn zu jedem Intervall $I \in \mathcal{J}^n$ und $\varepsilon > 0$ ein offenes Intervall $I_* \supset I$ existiert, so dass

$$|\mu(I_*) - \mu(I)| < \varepsilon. \quad \times$$

¹ Im Folgenden bezeichnet ein Hochindex 1-Intervalle, ein Tiefindex n -Intervalle.

Abb 1

Entartete und
nichtentartete
2-Intervalle

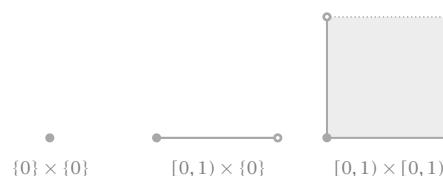


Abb 2

Intervall als Vereinigung
von Intervallen



Man beachte, dass für die Additivität nur solche Intervalle betrachtet werden, deren Vereinigung wieder ein Intervall ist. — Nun einige einfache Bemerkungen.

- 2 **Lemma** *Ist eine Intervallfunktion μ additiv, so ist $\mu(\emptyset) = 0$.* ✕

«»«» Da $\emptyset \in \mathcal{J}^n$ und $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$, gilt auch $\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cup \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset)$. Daraus folgt die Behauptung. »»»»

- 3 **Lemma** *Eine Intervallfunktion μ ist additiv genau dann, wenn für je endlich viele disjunkte Intervalle $I_1, \dots, I_m \subset \mathcal{J}^n$ gilt:*

$$I = \bigcup_{1 \leq k \leq m} I_k \in \mathcal{J}^n \Rightarrow \mu(I) = \sum_{1 \leq k \leq m} \mu(I_k). \quad \times$$

Man beachte, dass $I = I_1 \cup \dots \cup I_m$ wieder ein Intervall sein muss.

«»«» Der Beweis ist elementar, aber etwas umständlich, da man nicht direkt per Induktion vorgehen kann. Vielmehr zerlegt man zuerst die Intervalle I_k so in kleinere Intervalle, dass sich $\mu(I_k)$ durch Induktion als Summe ihrer Maße darstellen lässt. Danach erhält man ebenso das Gesamtmaß $\mu(I)$ durch Induktion – siehe Abbildung 2. Die Details übergehen wir. »»»»

- 4 **Lemma** *Eine additive Intervallfunktion μ ist monoton genau dann, wenn sie nichtnegativ ist.* ✕

«»«» Ist μ monoton, so gilt für jedes Intervall $I \in \mathcal{J}^n$ wegen $\emptyset \subset I$ auch $\mu(\emptyset) \leq \mu(I)$. Wegen $\mu(\emptyset) = 0$ ist also μ nichtnegativ.

Sei umgekehrt μ nichtnegativ. Sind $J \subset I$ zwei Intervalle in \mathcal{J}^n , so ist die Differenz $I \setminus J$ darstellbar als Vereinigung disjunkter Intervalle J_1, \dots, J_m . Mit $I = J \cup J_1 \cup \dots \cup J_m$, der Additivität 3 und Nichtnegativität von μ folgt

$$\mu(I) = \mu(J) + \mu(J_1) + \dots + \mu(J_m) \geq \mu(J).$$

Also ist μ auch monoton. »»»»

Lemma *Eine monotone Intervallfunktion μ ist regulär genau dann, wenn es zu jedem Intervall $I \in \mathcal{J}^n$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein offenes Intervall $I_* \supset I$ gibt, so dass $\mu(I_*) \leq \mu(I) + \varepsilon$.* ✕

Abb 3

Darstellung von $I \setminus J$ 

««« Ist μ monoton, so gilt für $I_* \supset I$ immer $\mu(I_*) \geq \mu(I)$. Es muss also nur noch $\mu(I_*) \leq \mu(I) + \varepsilon$ gefordert werden, um $|\mu(I_*) - \mu(I)| < \varepsilon$ zu erhalten. »»»

■ Maße

Wir spezifizieren nun diejenigen Intervallfunktionen, die sich für die Definition eines Integrals eignen.

Definition Ein *Maß* ist eine additive, monotone, reguläre Intervallfunktion. ✕

Insbesondere ist also ein Maß μ immer nichtnegativ mit $\mu(\emptyset) = 0$. In der Maßtheorie ist der Begriff des Maßes wesentlich allgemeiner. Die hier gewählte Definition reicht aber für unsere Bedürfnisse.

► **Beispiele für Maße** A. Bezeichnet $|\cdot|$ die euklidische Länge eines eindimensionalen Intervalls, so wird für $I = I^1 \times \dots \times I^n \in \mathcal{J}^n$ durch

$$\lambda_n(I) = \lambda_n(I^1 \times \dots \times I^n) := \prod_{1 \leq \nu \leq n} |I^\nu|$$

das *Volumenmaß* λ_n auf \mathbb{R}^n erklärt. Für $n = 1$ sprechen wir auch vom *Längenmaß*, für $n = 2$ vom *Flächenmaß*.

B. Sei $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ eine *diskrete Menge*, also eine Menge ohne Häufungspunkte. Eine beliebige Funktion

$$m : \Lambda \rightarrow (0, \infty)$$

ordnet jedem Punkt $p \in \Lambda$ eine *Masse* $m(p)$ zu. Mit der Definition

$$m(I) := \sum_{p \in I \cap \Lambda} m(p), \quad I \in \mathcal{J}^n,$$

dehnen wir m zu einem Maß aus, genannt *diskrete Masseverteilung* auf Λ . Man beachte, dass $I \cap \Lambda$ immer endlich ist, auch wenn Λ unendlich ist.

C. Die *konstante Verteilung* $\nu : \Lambda \rightarrow \{1\}$ ist ein Spezialfall einer diskreten Masseverteilung. In diesem Fall ist

$$\nu(I) = \text{card}(I \cap \Lambda),$$

also die Anzahl der Punkte in Λ , die in I liegen. Daher spricht man auch von einem **Zählmaß**. Zählmaße auf \mathbb{N} oder \mathbb{Z} erlauben es, Reihen als Integrale zu betrachten. Alle Sätze über das Lebesgueintegral gelten damit entsprechend auch für Reihen.

D. Jede monoton steigende Funktion $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert auf \mathcal{J}^1 durch

$$\begin{aligned}\mu_\varphi([a, b]) &:= \varphi_+(b) - \varphi_-(a), & \mu_\varphi((a, b]) &:= \varphi_+(b) - \varphi_+(a), \\ \mu_\varphi([a, b)) &:= \varphi_-(b) - \varphi_-(a), & \mu_\varphi((a, b)) &:= \varphi_-(b) - \varphi_+(a),\end{aligned}$$

das sogenannte **Lebesgue-Stieltjes-Maß** μ_φ zur **Verteilungsfunktion** φ A-10. Ist zum Beispiel s eine Sprungstelle von φ , so ist

$$\mu_\varphi(\{s\}) = \varphi_+(s) - \varphi_-(s) > 0$$

die Sprunghöhe von φ in diesem Punkt.

E. Ein Maß μ_r auf \mathbb{R}^r und ein Maß μ_s auf \mathbb{R}^s definieren ein **Produktmaß** $\mu_{r,s} = \mu_r \times \mu_s$ auf \mathbb{R}^{r+s} . Denn jedes $I \in \mathcal{J}^{r+s}$ hat eine eindeutige Darstellung

$$I = I_r \times I_s, \quad I_r \in \mathcal{J}^r, \quad I_s \in \mathcal{J}^s,$$

und

$$\mu_{r,s}(I) = \mu_{r,s}(I_r \times I_s) := \mu_r(I_r) \mu_s(I_s)$$

ergibt ein wohldefiniertes Maß auf \mathcal{J}^{r+s} . Für das Volumenmaß gilt beispielsweise

$$\lambda_2 = \lambda_1 \times \lambda_1, \quad \lambda_3 = \lambda_2 \times \lambda_1 = \lambda_1 \times \lambda_1 \times \lambda_1.$$

F. Ist $A \in \mathcal{J}^n$ mit $\lambda(A) > 0$ fest gewählt, so definiert

$$\lambda_A(I) := \frac{\lambda(I \cap A)}{\lambda(A)}$$

das **relative Volumenmaß** λ_A . Für jedes Intervall $I \supset A$ gilt dann $\lambda_A(I) = 1$. \blacktriangleleft

Im Folgenden bezeichnet λ_n oder kürzer λ immer das Volumenmaß, auch wenn wir dies nicht jedes Mal erwähnen.

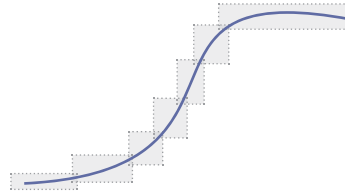
■ Nullmengen

Ein Charakteristikum des zu definierenden Integrals ist, dass alles ignoriert werden kann, was auf **Nullmengen** stattfindet. Diese Mengen spielen deshalb eine wichtige Rolle.

Definition Sei μ ein Maß auf \mathcal{J}^n . Eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt **μ -Nullmenge**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge von n -Intervallen $(I_k)_{k \geq 1}$ gibt, so dass

$$N \subset \bigcup_{k \geq 1} I_k, \quad \sum_{k \geq 1} \mu(I_k) < \varepsilon. \quad \times$$

Abb 4
Überdeckung einer
 λ -Nullmenge



Bemerkungen a. Eine μ -Nullmenge N kann also durch abzählbar viele Intervalle mit beliebig kleinem Gesamtmaß überdeckt werden. Dabei ist N eine völlig beliebige Menge. Sie kann zum Beispiel auch unbeschränkt sein.

b. Wird N bereits durch *endlich* viele Intervalle derart überdeckt, so ist N ebenfalls eine μ -Nullmenge. Denn wir können diese durch leere Intervalle zu einer abzählbar unendlichen Folge $(I_k)_{k \geq 1}$ ergänzen, die wegen $\mu(\emptyset) = 0$ die gewünschten Eigenschaften hat.

c. Jede Teilmenge einer μ -Nullmenge ist ebenfalls eine μ -Nullmenge.

d. Es hängt immer vom Maß μ ab, ob eine Menge eine Nullmenge ist. \rightarrow

5 **Lemma** Die abzählbare Vereinigung von μ -Nullmengen ist wieder eine μ -Nullmenge. \times

««« Sei $(N_k)_{k \geq 1}$ eine Folge von Nullmengen, N deren Vereinigung und $\varepsilon > 0$. Dann existiert zu jedem $k \geq 1$ eine Folge von Intervallen $(I_{k,l})_{l \geq 1}$ mit

$$N_k \subset \bigcup_{l \geq 1} I_{k,l}, \quad \sum_{l \geq 1} \mu(I_{k,l}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Die Vereinigung aller dieser Intervalle $I_{k,l}$ ist wieder abzählbar 3.19, und es gilt

$$N = \bigcup_{k \geq 1} N_k \subset \bigcup_{k,l \geq 1} I_{k,l}.$$

Außerdem gilt

$$\sum_{k,l \geq 1} \mu(I_{k,l}) = \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{l \geq 1} \mu(I_{k,l}) \right) < \sum_{k \geq 1} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Da also zu jedem $\varepsilon > 0$ eine solche Überdeckung existiert, ist N ebenfalls eine μ -Nullmenge. »»»

- ▶ A. Jedes Intervall $I \in \mathcal{J}^n$ mit $\mu(I) = 0$ ist eine μ -Nullmenge.
- B. Jede endliche oder abzählbare Menge ist eine λ_n -Nullmenge.
- C. Insbesondere ist \mathbb{Q} eine λ_1 -Nullmenge in \mathbb{R} .
- D. Jede Hyperebene im \mathbb{R}^n ist eine λ_n -Nullmenge.
- E. Der Graph einer stetigen Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine λ_2 -Nullmenge.

F. Ist m eine beliebige Masseverteilung auf der diskreten Menge $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, so ist *jede* Menge $N \subset \mathbb{R}^n$, die keinen Punkt von Λ enthält, eine m -Nullmenge.

G. Ist die monoton steigende Funktion $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konstant auf einem Intervall K , so ist jedes Intervall $I \subset K$ eine μ_φ -Nullmenge. ◀

Im Beweis des Satzes von Tonelli ?? benötigen wir noch folgende äquivalente Charakterisierung einer μ -Nullmenge.

- 6 **Lemma** Eine Menge N ist eine μ -Nullmenge genau dann, wenn es eine Überdeckung (I_k) durch Intervalle gibt, so dass deren μ -Gesamtmaß endlich ist und jeder Punkt von N von unendlich vielen Intervallen überdeckt wird. ✕

⟨⟨⟨ ⇒ Zu jedem $k \geq 1$ existiert eine Überdeckung $(I_{k,l})_{l \geq 1}$ von N mit Gesamtmaß kleiner als $1/2^k$. Die *gesamte* Familie $(I_{k,l})_{k,l \geq 1}$ ist dann eine Überdeckung von N mit endlichem Gesamtmaß, wobei jeder Punkt von Intervallen beliebig kleinen Maßes überdeckt wird. Also wird jeder Punkt unendlich oft überdeckt.

⇐ Sei (I_k) eine solche Überdeckung. Zu $\varepsilon > 0$ existiert dann ein K mit

$$\sum_{k \geq K} \mu(I_k) < \varepsilon,$$

und $(I_k)_{k \geq K}$ ist immer noch eine Überdeckung von N . Also ist N eine μ -Nullmenge. ⟩⟩⟩

■ μ -fast überall

Nun vereinbaren wir noch einige Redeweisen.

Eine Funktion f heißt μ -definiert auf \mathbb{R}^n , wenn es eine μ -Nullmenge N gibt, so dass f auf N^c definiert ist. Ist (f_k) eine Folge μ -definierter Funktionen, so gibt es auch *eine* gemeinsame μ -Nullmenge N , so dass *alle* f_k auf N^c definiert sind \S . Man sagt dann auch, die Folge $(f_k)_{k \geq 1}$ sei μ -definiert.

Allgemeiner sagt man, eine Eigenschaft gilt μ -fast überall auf \mathbb{R}^n , wenn es eine μ -Nullmenge N gibt, so dass diese Eigenschaft auf N^c gilt. So heißen zum Beispiel zwei Funktionen f und g μ -fast überall gleich, geschrieben $f =_\mu g$, wenn es eine μ -Nullmenge N gibt, so dass f und g auf N^c definiert sind und dort übereinstimmen. Entsprechend sind $f \leq_\mu g$ und $f \geq_\mu g$ erklärt.

Schließlich heißt eine Funktionenfolge (f_k) μ -fast überall konvergent oder kurz μ -konvergent gegen eine Funktion f , wenn es eine μ -Nullmenge N gibt, so dass alle f_k auf N^c definiert sind und dort punktweise gegen f konvergieren. Dafür schreiben wir auch

$f_k \rightarrow_\mu f$. Entsprechend ist eine μ -monotone Funktionenfolge definiert.

Abb 5
Differenz zweier
Intervalle



■ Zulässige Mengen

Vereinigung und Differenz von Intervallen sind im Allgemeinen *keine* Intervalle. Daher betrachten wir nun die größere Familie der *zulässigen Mengen*, die ebenfalls sämtlich beschränkt sind.

Definition Jede Vereinigung von endlich vielen Intervallen in \mathcal{J}^n heißt eine *zulässige Menge* im \mathbb{R}^n . Ihre Familie wird mit \mathcal{Z}^n bezeichnet. ✕

- 7 **Satz** Die Familie \mathcal{Z}^n bildet einen *Mengenkörper*: Vereinigung, Durchschnitt und Differenz endlich vieler zulässiger Mengen sind wieder zulässige Mengen. ✕

««« Seien $M = I_1 \cup \dots \cup I_m$ und $N = J_1 \cup \dots \cup J_n$ zulässige Mengen. Es ist klar, dass deren Vereinigung wieder eine zulässige Menge ist. Ihr Durchschnitt ist

$$M \cap N = \bigcup_{k,l} (I_k \cap J_l).$$

Jeder Schnitt $I_k \cap J_l$ ist ein beschränktes n -Intervall, und die Vereinigung ist endlich. Also ist $M \cap N$ ebenfalls zulässig.

Ihre Differenz können wir darstellen als

$$M \setminus N = (I_1 \cup \dots \cup I_m) \setminus (J_1 \cup \dots \cup J_n) = \bigcup_{1 \leq k \leq m} \left\{ \bigcap_{1 \leq l \leq n} I_k \setminus J_l \right\}.$$

Jede Differenz $I_k \setminus J_l$ ist eine zulässige Menge, wie man elementar beweist. Durchschnitt und Vereinigung ergeben hieraus wieder zulässige Mengen, wie bereits gezeigt wurde. Also ist auch $M \setminus N$ zulässig. »»»

Wichtig für die Definition des Integrals ist die Beobachtung, dass zulässige Mengen immer als Vereinigung *disjunkter* Intervalle geschrieben werden können. Der Beweis des folgenden Lemmas ist als Übung überlassen.

- 8 **Lemma** Jede zulässige Menge $M = J_1 \cup \dots \cup J_n$ kann geschrieben werden als Vereinigung paarweise disjunkter Intervalle I_1, \dots, I_m mit

$$I_k \cap J_l \neq \emptyset \Rightarrow I_k \subset J_l$$

für alle k, l . Jedes I_k ist also ganz oder gar nicht in jedem J_l enthalten. ✕