1. Vortragsübung 28.10.2021

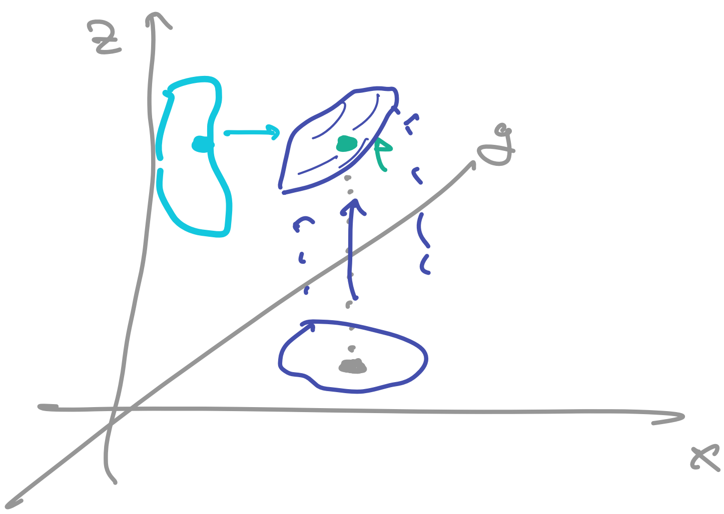
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$

p regulärer Punkt : $\nabla f(p) \neq 0$

z.B.: $f_z(p) \neq 0$

$p = (x,y,z)$ dann : $z = z(x,y)$

für $f(x,y,z) = f(p)$



$f_x(p) \neq 0$

dann

$x = x(y,z)$

für $f(x,y,z) = f(p)$

$$f : \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m}$$

$$p \in \mathrm{Def}(f)$$

$$f(p) \in \mathbb{R}^{m}$$

$$? \quad \{ \, x \in \mathbb{R}^{m+n} : f(x) = f(p) \, \}$$

$$= c$$

$$= f^{-1}(c) = f^{-1}(f(p))$$

Homöomorphie :

Lipschitz

$\vee$

$\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ stetig diffb.

alle

φ bijektiv : $\varphi^{-1} : \Omega' \longrightarrow \Omega$

& φ^{-1} ist stetig. (Lipschitz / diff.)

$\Longleftrightarrow$ φ offen

Diffeomorphie :

Lipeomorphie : Lipschitz

Die klassische newtonsche Bewegungsgleichung eines reibungsfreien Teilchens der Masse 1 auf der reellen Achse unter dem Einfluss eines Potentials $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist

$$\boxed{\ddot{x} = -V'(x), \qquad x \in \mathbb{R}.}$$

Als System erster Ordnung lauten die Gleichungen

$$\mathrm{CH} \left\{ \quad \ddot{x} = \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -V'(x). \end{aligned} \right.$$

$y := \dot{x}$

Die *Gesamtenergie* dieses System ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie,

kinetische

$$E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad E(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x).$$

potentielle } Energie

Diese ist konstant entlang jeder Lösung, denn

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(x, \dot{x}) = E_x \dot{x} + E_{\dot{x}} \ddot{x} = V'(x)\dot{x} - \dot{x}V'(x) = 0.$$

Das ist der klassische *Energieerhaltungssatz*. Jede Lösungskurve ist somit in einer Niveaumenge der Energiefunktion enthalten, und die Niveaumengen liefern bereits Aufschlüsse über die Lösungen der Differenzialgleichung …

$E = E(x,y) = E(x,\dot{x})$ entlang Lsg:

$$\frac{d}{dt} E(x,\dot{x}) = E_x \dot{x} + E_{\dot{x}} \ddot{x}$$
$$= V' \cdot \dot{x} + \dot{x}\, \ddot{x} \quad \ddot{x} = -V'(x)$$
$$= 0.$$

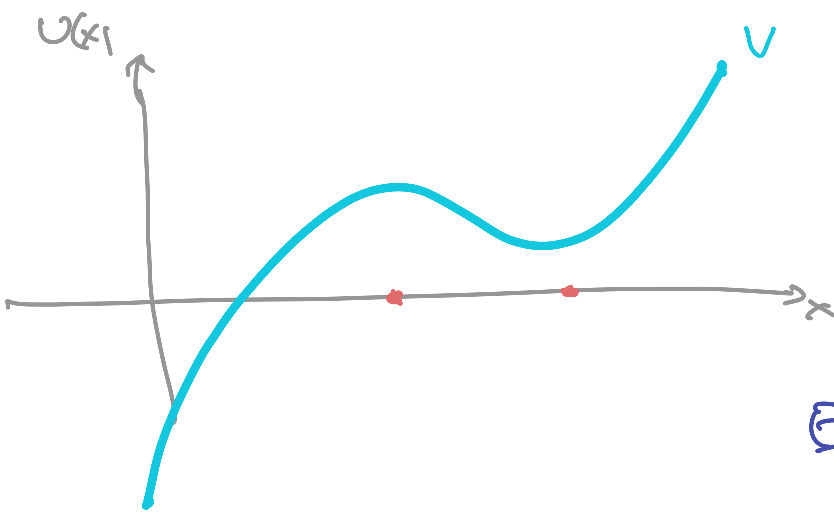
Jede Lösungskurve von CH liegt auf einer Niveaumenge der Energiefunktion.

Niveaumengen der $\boxed{E(x,y) = \frac{1}{2} y^2 + V(x)}$

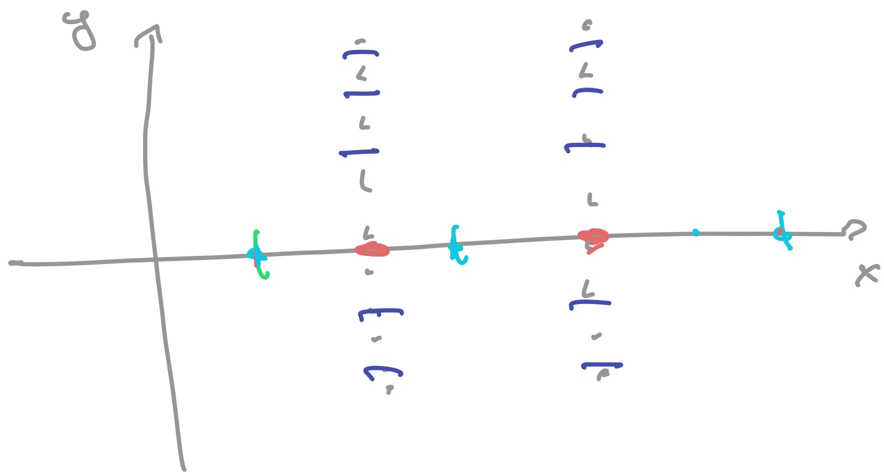
Kritische Punkte: $\nabla E = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} U'(x) \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff y = 0 \ \wedge \ U'(x) = 0.$$



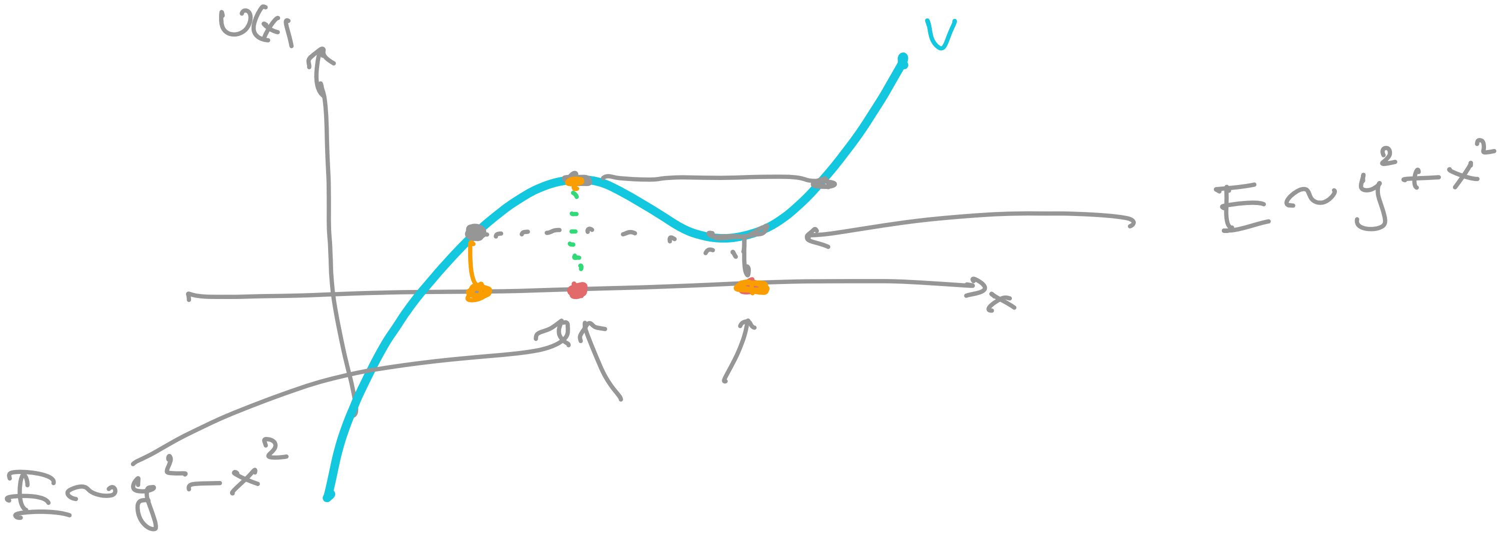
$$E = \frac{1}{2} y^2 + U(x)$$

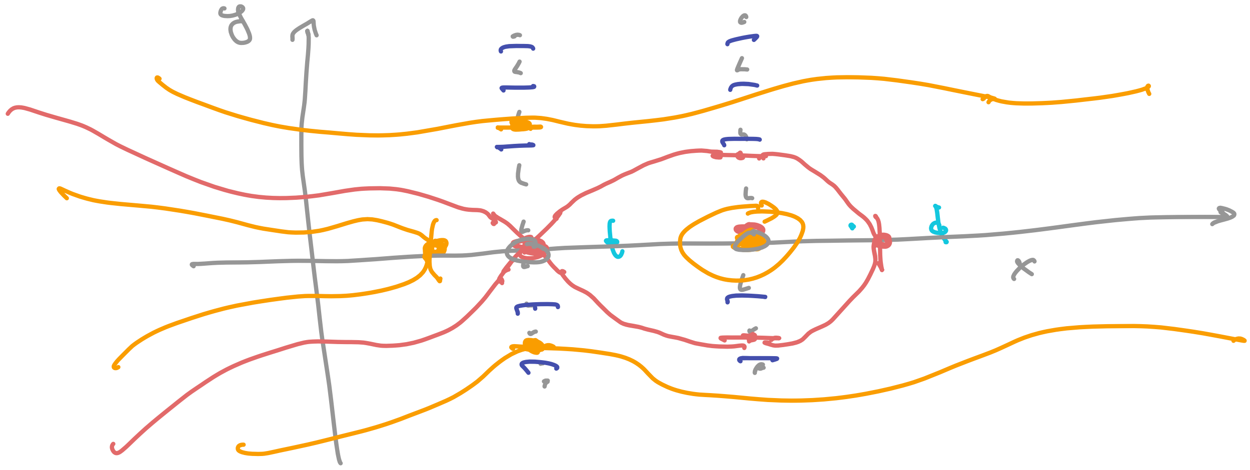


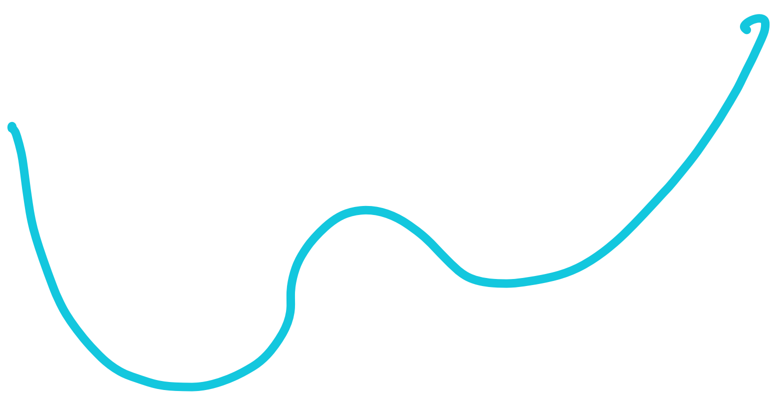
Bei Punkt (i) $y \neq 0$, $\underline{U'(x) = 0}$: $y = y(x)$ lokal

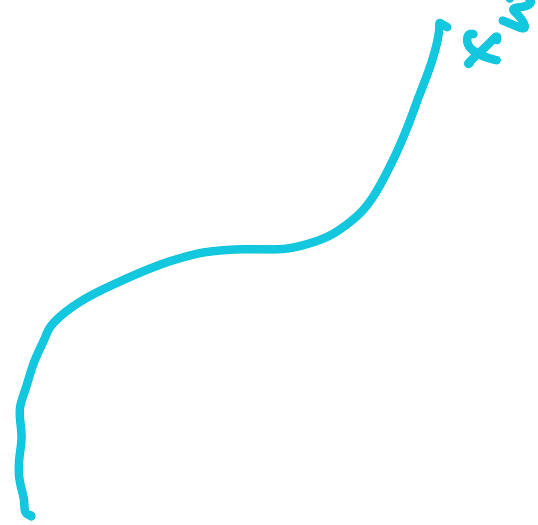
(ii) $\underline{y = 0}$, $U'(x) \neq 0$: $x = x(y)$

Auch: symmetrisch zur x-Achse. $\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=0} = 0$









$$\ddot{x} = -V'(x) \quad \Bigg\} \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -U'(x) \end{aligned}$$

$$E = \frac{1}{2} y^2 + U(x) = E(x,y).$$

(FS) anwendbar, wo

$$\nabla E \neq 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} U'(x) \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also: $y \neq 0$

oder $y = 0 \wedge U'(x) \neq 0$

<u>Nicht</u> <u>anwendbar</u>:

$$\underbrace{y = 0 \wedge U'(x) = 0}_{\text{typisch: } U''(x) \neq 0:}.$$

$$E \sim y^2 \pm x^2.$$

1 Zeichnen sie eine Auswahl typischer Niveaumengen zu

a. $x^4 - 4x^2 + y^2$

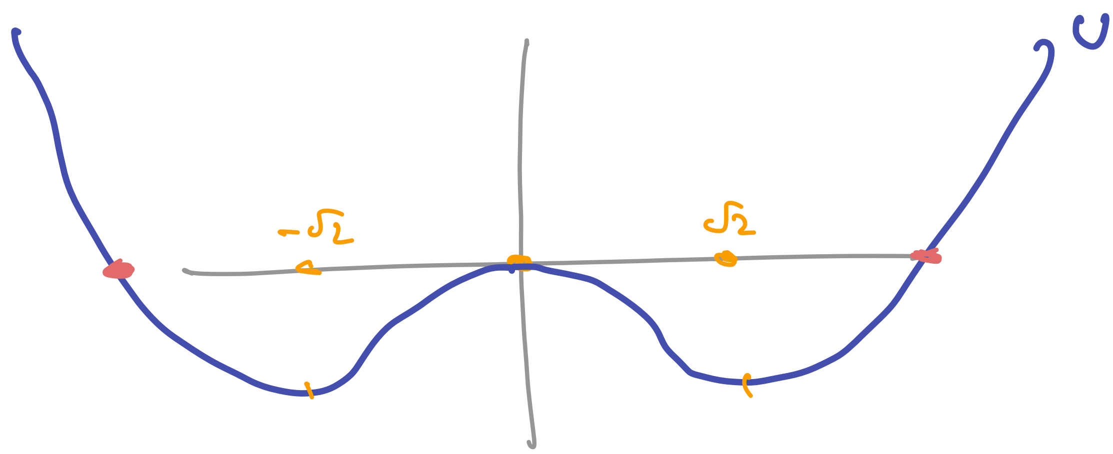
b. $x^2 e^{-x} + y^2$.

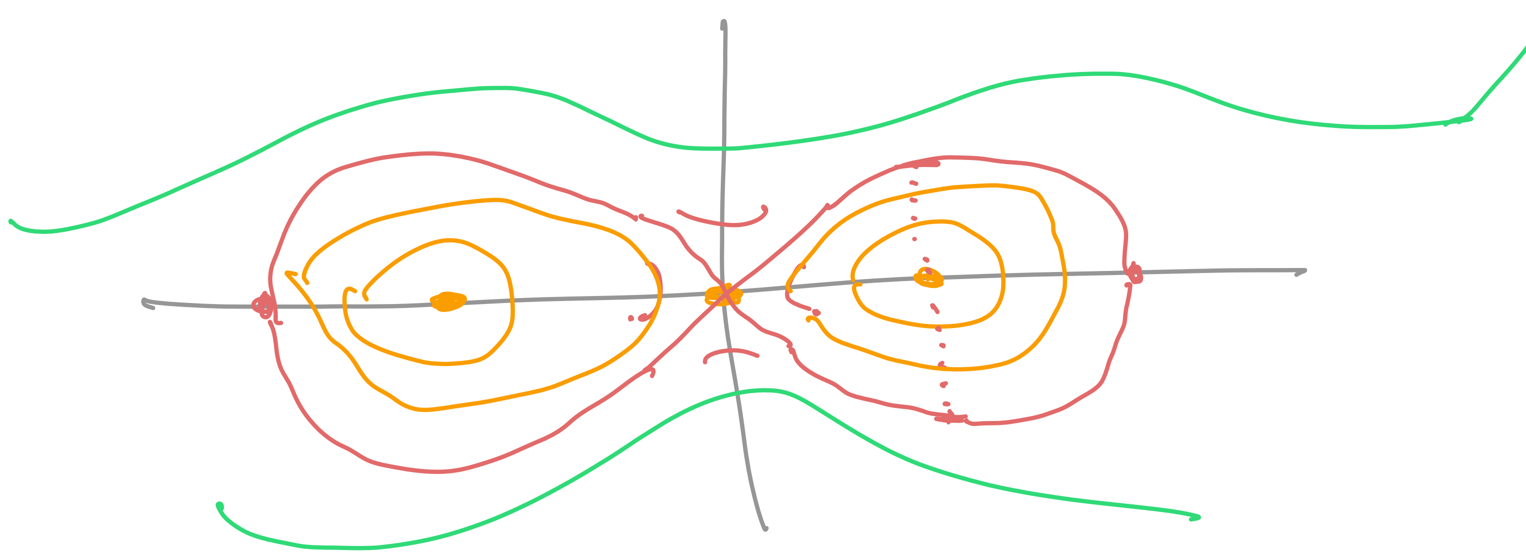
[illegible] [illegible]

Welche davon sind Mannigfaltigkeiten? Welches sind die kritischen Werte?

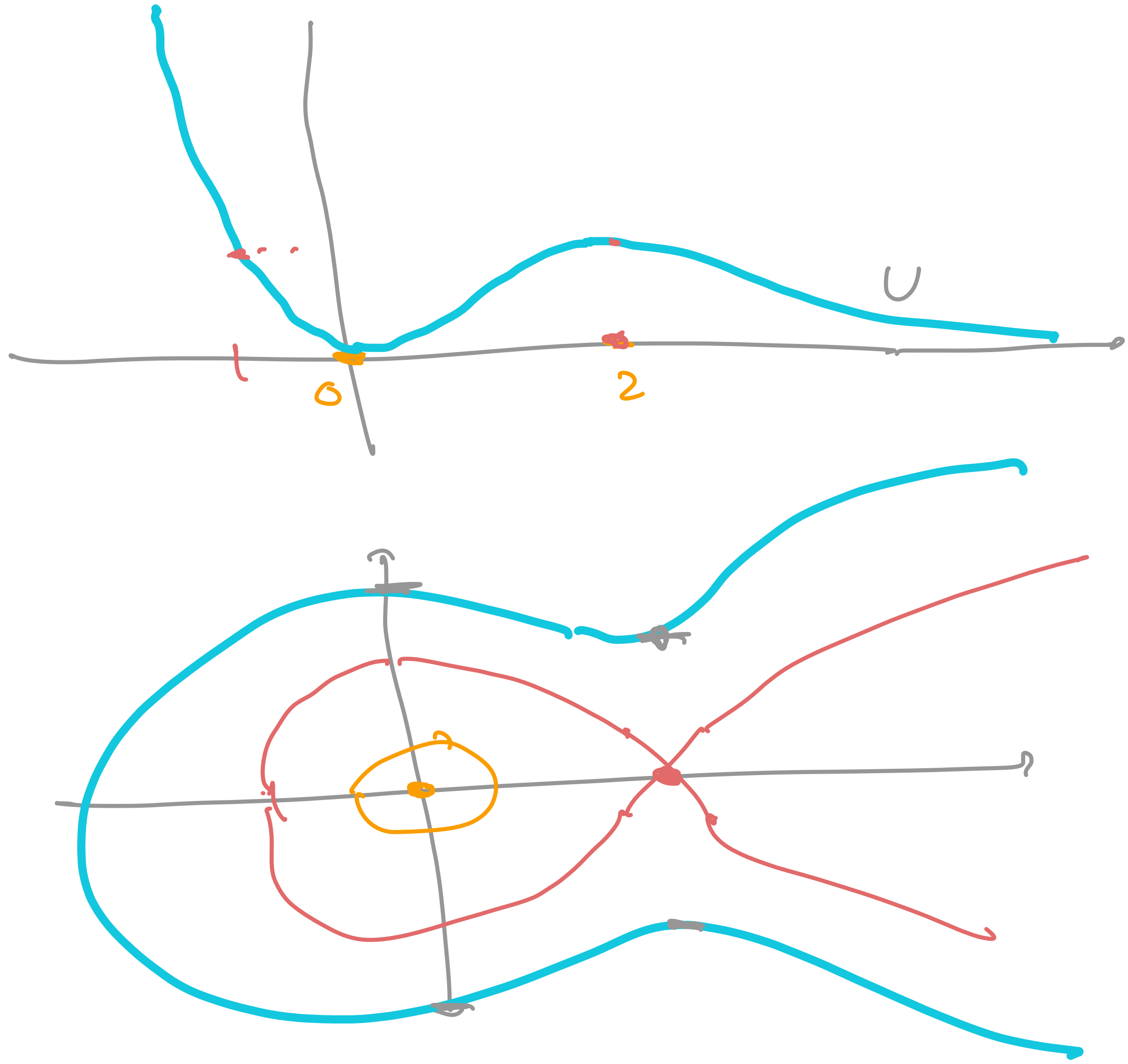
a. $U(x) = x^4 - 4x^2$

b. $U(x) = x^2 e^{-x}$





$U(x) = x^2 e^{-x}$



2 Man zeige, dass es eine Funktion $\varphi \in C^\infty(I)$ mit $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ und $\varphi(0) = 0$ gibt, die die Gleichung

$$\boxed{\underbrace{x\varphi^2(x) + 2x^2 e^{\varphi(x)}} = \varphi(x)}$$

erfüllt. Bestimmen sie außerdem $\varphi'(0)$.

y

$\rightsquigarrow \quad xy^2 + 2xe^y = y$

$\Longleftrightarrow \quad xy^2 + 2xe^y - y = 0$

$\varphi(0) = 0$: $0 \cdot \ldots + 2 \cdot 0 \ldots = 0$

$\varphi(0) = 0$ löst die Gleichung in Punkt 0.

Hilfsfunktion : $\varphi = y$:

$f(x,y) = xy^2 + 2x^2 e^y - y \overset{!}{=} 0$

$f(0,0) = 0$ ✓

„Um $x=0$ herum fortsetzen", Frage:

?: $y = y(x)$:

$\boxed{f_y(0,0) \neq 0.}$

Also

$f_y = 2xy + 2x^2 e^y - 1$

$f_y(0,0) = -1 \neq 0.$ ✓

Also ex. eine glatte Funktion $\varphi(x)$

Ableitung bei 0: $f(x, \varphi(x)) \equiv 0$:

$$\varphi'(0) = -\frac{f_x(0,0)}{f_y(0,0)} = f_x(0,0) = 0.$$

3 Besitzt die Gleichung

$$\sin(\pi(x+y)) = 1$$

in der Nähe des Punktes $(1/4, 1/4)$ Lösungen? Wie sieht das Lösungsgebilde aus?

$f(x,y) = \sin \pi(x+y)$.

Bei $(\tfrac14, \tfrac14)$:

$f(..) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Kan:

$f_x = f_y = \pi \cos \pi(x+y) \Big|_{(\frac14,\frac14)} = 0$ ☹

Aber:

$\boxed{\sin \pi\underbrace{(x+y)}_{\frac12} = 1}$

um $(\tfrac14, \tfrac14)$

$\iff \pi(x+y) = \frac{\pi}{2} \quad (+\,2\pi n)$

$\iff x+y = \frac12 \quad \sim \sin \pi(1/2) = 1$