Die klassische newtonsche Bewegungsgleichung eines reibungsfreien Teilchens der Masse 1 auf der reellen Achse unter dem Einfluss eines Potentials $V\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist

$$\ddot{x} = -V'(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Als System erster Ordnung lauten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -V'(x). \end{aligned}$$

Die *Gesamtenergie* dieses System ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie,

$$E\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad E(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x).$$

Diese ist konstant entlang jeder Lösung, denn

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(x, \dot{x}) = E_x \dot{x} + E_{\dot{x}} \ddot{x} = V'(x)\dot{x} - \dot{x}V'(x) = 0.$$

Das ist der klassische *Energieerhaltungssatz*. Jede Lösungskurve ist somit in einer Niveaumenge der Energiefunktion enthalten, und die Niveaumengen liefern bereits Aufschlüsse über die Lösungen der Differenzialgleichung ...

1 Zeichnen sie eine Auswahl typischer Niveaumengen zu

a. $x^4 - 4x^2 + y^2$
b. $x^2 \mathrm{e}^{-x} + y^2$.

Welche davon sind Mannigfaltigkeiten? Welches sind die kritischen Werte?

2 Man zeige, dass es eine Funktion $\varphi \in C^\infty(I)$ mit $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ und $\varphi(0) = 0$ gibt, die die Gleichung

$$x\varphi^2(x) + 2x^2 \mathrm{e}^{\varphi(x)} = \varphi(x)$$

erfüllt. Bestimmen sie außerdem $\varphi'(0)$.

3 Besitzt die Gleichung

$$\sin(\pi(x + y)) = 1$$

in der Nähe des Punktes $(1/4, 1/4)$ Lösungen? Wie sieht das Lösungsgebilde aus?