1 *a.* Für einen positiv orientierten 3-Würfel $c : \mathbb{I}^3 \to \mathbb{R}^3$ gilt

$$|c(\mathbb{I}^3)| = \int_c \mathrm{d}V = \int_{\partial c} x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

b. Man bestimme damit das Volumen der Einheitskugel.

a. Satz von Stokes:

$$\int_{\partial c} x\,dy \wedge dz = \int_c d(\quad) = \int_c dx \wedge dy \wedge dz = \int_c dV = |c(\mathbb{I}^3)|$$

Bemerkung: Gilt ebenso für

$y\,dz \wedge dx$, $z\,dx \wedge dy$.

$d(\quad) = \dots = dx \wedge dy \wedge dz.$

b. Kugelkoordinaten:

$$c : (0,1)^3 \longrightarrow B_1(0)$$

$$(*) \left\{ \begin{pmatrix} r \\ t \\ u \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r \sin \pi t \cos 2\pi u \\ r \sin \pi t \sin 2\pi u \\ r \cos \pi t \end{pmatrix} \right.$$

1. $$\int_B d\omega = \int_c d\omega$$

$$\overset{\text{Trafo}}{=} \int_{[0,1]^3} \underbrace{2\pi^2 r^2 \sin(\pi t)\, dr\, dt\, d\varphi}_{\text{Integrand von } c^*}$$

$$= 2\pi^2 \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 \sin(\pi t)\, dt$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left(-\cos \pi t\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{4}{3}\pi .$$

2. $$\int_{\partial c} x\, dy \wedge dz = \int_{\partial [0,1]^3} \underbrace{c^*(x\, dy \wedge dz)}_{c^*\omega}$$

$$c^*\omega = \overbrace{r \sin(\pi t) \cos(2\pi\varphi)}^{x} \cdot d\big(\underbrace{r \sin(\pi t) \sin(2\pi\varphi)}_{y}\big) \wedge d\big(\underbrace{r \cos(\pi t)}_{z}\big)$$

Randstücke $\partial[0,1]^3$: 0 $= 0$

Seiten von c:

$c_{2,i}$, $i = 0,1$: $t = 0$ o. $t = 1$

$c_{3,i}$: $\varphi = 0$ o. $\varphi = 1$

$C_{1,0}$: $\quad r = 0 \quad \Big| = 0$

$C_{1,1}$: $\quad c^*\omega = \sin^3(\pi t)\cos(2\pi u) \cdot 2\pi \cdot (-\pi) \cdot \cos(2\pi u)\, du \wedge dt$

$$= \underbrace{2\pi^2 \sin^3(\pi t)\cos^2(2\pi u)}\; \underbrace{dt \wedge du}_{dV}$$

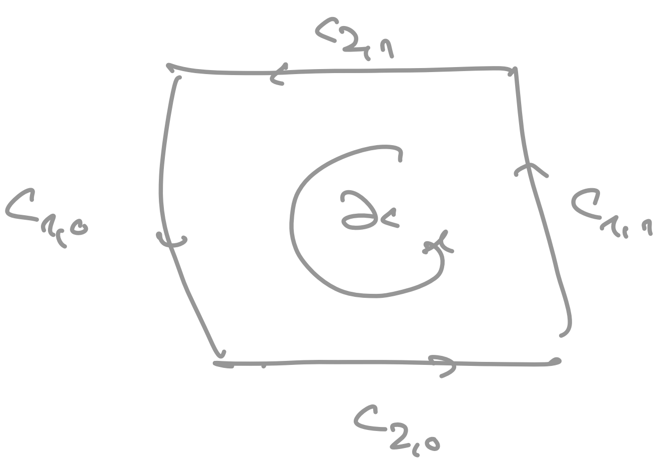
Also gilt:

$$\int_{\partial[0,1]^3} c^*(x\, dy \wedge dz) = \int_{C_{1,1}}$$

$$= \int_0^1\int_0^1 2\pi^2 \sin^3(\pi t)\cos^2(2\pi u)\, dt\, du$$

$$= \dots$$

$$= \frac{4}{3}\pi.$$



Remark: Let $x =$ [illegible]

So [illegible] $dx = 0$.

$x \to y \mapsto$ [illegible] ...

2 Sei M die 2-Sphäre im $\mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt m und Radius $r > 0$. Man bestimme

$$\int_M x^2\, dy \wedge dz + y^2\, dz \wedge dx + z^2\, dx \wedge dy.$$

$M = \partial B_r(m)$:

$$\int_{\partial B_r(m)} x^2\, dy \wedge dz + \dots$$

$$\underset{\text{Stokes}}{=} \int_{B_r(m)} d(\quad)$$

$$= \int_{B_r(m)} 2x\, dx \wedge dy \wedge dz + 2y\, dy \wedge dz \wedge dx + 2z\, dz \wedge dx \wedge dy$$

$$= \int_{B_r(m)} 2(x+y+z)\, dx \wedge dy \wedge dz$$

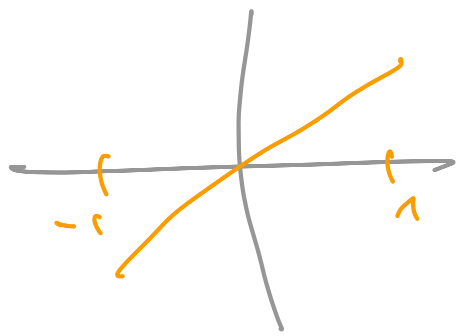
Translation: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = m + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$= \int_{B_r(0)} 2(m_x + x + m_y + y + m_z + z)\, dx \wedge dy \wedge dz$$

$$= 2(\omega_x + \omega_y + \omega_z) \int_{B_r(0)} dV$$

$$+ \; 2 \underbrace{\int_{B_r(0)} (x+y+z) \, dV}_{=0} \quad {}^{*)}$$

$$= 2(\omega_x + \omega_y + \omega_z) \, \frac{4\pi}{3} r^3 .$$



*) Trafo: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$

$$|\mathrm{Jac}| = 1$$

3 Verallgemeinern sie den Divergenzsatz auf eine berandete n-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$. Drücken sie damit den Inhalt von $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ durch den Inhalt von $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ aus.

Divergenzsatz in $\mathbb{R}^3$: $v = (v_1, \dots, v_3)$

$n=3$: $\leadsto$
$$\boxed{\omega_v = v_1\, dx_2 \wedge dx_3 + v_2\, dx_3 \wedge dx_1 + \dots}$$

Dann:
$$d\omega_v = (\operatorname{div} v)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Jetzt analog in $\mathbb{R}^n$:

$v = (v_1, \dots, v_n)$:
$$\omega_v^{n-1} := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} v_i \underbrace{dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n}$$

Dann:
$$d\omega_v^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} dv_i \wedge$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\, (-1)^{i-1}\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$= (\operatorname{div} v)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n .$$

Also gilt:

$$\int_M \operatorname{div} v \, dV = \int_{\partial M} \omega_v^{n-1} ,$$

Bsp.: Flächeninhalt von S^{n-1} : $v = x$

$$dA = \overset{= v_1}{x_1}\, dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n + (-1)^1 \overset{= v_2}{x_2}\, dx_1 \wedge \widehat{dx_2} \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$\vdots$$

$$+ \quad \dots \quad = \omega_x^{n-1} \quad , \quad v(x) = x$$

$$\operatorname{div} v = n$$

Daher:

$$|S^{n-1}| = \int_{S^{n-1}} \omega_x^{n-1} = \int_{\partial B^n} \omega_x^{n-1}$$

$$= \int_{B^n} n\, dV) = n \int_{B^n} dV = n \cdot |B^n|$$

4 Sei K eine kompakte, berandete n-Mannigfaltigkeit.
a. Für eine differenzierbare Abbdildung $\Phi: K \to \mathbb{R}^n$ gilt

$$\int_{\partial K} \Phi^* \omega = 0$$

für jede geschlossene $n-1$-Form ω im $\mathbb{R}^n$.
b. Daraus folgt: Es gibt *keine glatte Retraktion von K auf ∂K*, also eine differenzierbare Abbildung

$$\Phi: K \to K, \qquad \Phi|\partial K = id.$$

a.

$$\int_{\partial K} \Phi^* \omega = \int_K d(\Phi^* \omega) = \int_K \Phi^* (\underbrace{d\omega}_{0}) = 0.$$

b. Sei also $\Phi : K \to \partial K$, $\Phi|\partial K = id$.

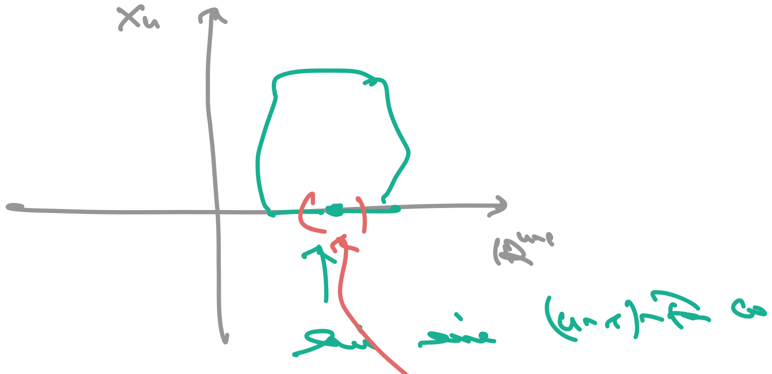
Dann gilt

$$0 = \int_K \Phi^*(d\omega) = \int_K d(\Phi^*\omega) = \int_{\partial K} \underset{id}{\Phi^*}\omega = \int_{\partial K} \omega$$

für jede geschl. $n-1$-Form ω.

Widerspruch !

Lokal :



$$\omega_{n-1} = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$$

$$d\omega_{n-1} = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi > 0, \quad , \quad \operatorname{supp} \varphi \subset$$