1 *a.* Für einen positiv orientierten 3-Würfel $c\colon \mathbb{I}^3 \to \mathbb{R}^3$ gilt

$$|c(\mathbb{I}^3)| = \int_c \mathrm{d}V = \int_{\partial c} x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

b. Man bestimme damit das Volumen der Einheitskugel.

2 Sei M die 2-Sphäre im $\mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt m und Radius $r > 0$. Man bestimme

$$\int_M x^2\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

3 Verallgemeinern sie den Divergenzsatz auf eine berandete n-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$. Drücken sie damit den Inhalt von $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ durch den Inhalt von $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ aus.

4 Sei K eine kompakte, berandete n-Mannigfaltigkeit.

a. Für eine differenzierbare Abbdildung $\Phi\colon K \to \mathbb{R}^n$ gilt

$$\int_{\partial K} \Phi^* \omega = 0$$

für jede geschlossene $n-1$-Form ω im $\mathbb{R}^n$.

b. Daraus folgt: Es gibt *keine glatte Retraktion von K auf ∂K*, also eine differenzierbare Abbildung

$$\Phi\colon\ K \to K, \qquad \Phi|\partial K = id.$$