1 Man bestimme die Flächeninhalt der Einheitsspähre im $\mathbb{R}^3$ unter Verwendung von Kugelkoordinaten.

2 Sei B die Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$. Man verifiziere die Identität

$$\int_B \Delta f \,\mathrm{d}V = \int_{\partial B} \frac{\partial f}{\partial n} \,\mathrm{d}A$$

durch direkte Berechnung beider Seiten für die Funktionen
a. $f_1 = x^2$. *b.* $f_2 = x^2 + y^2$ *c.* $f_3 = x^2 + y^2 + z^2$

3 Gegeben sei das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v(x, y, z) = \begin{pmatrix} y + z + 1 \\ x + z + 1 \\ x + y + 1 \end{pmatrix}.$$

a. Untersuchen sie, ob v ein Gradientenvektorfeld ist, und bestimmen sie gegebenfalls ein Potential U.
b. Man besimmte

$$\int_M v \bullet \mathrm{d}\vec{s}$$

einmal direkt und einmal mit dem Satz von Stokes für den 1-Würfel $M = c(\mathbb{I})$,

$$c : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad c(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}.$$

1 Man bestimme die Flächeninhalt der Einheitsspähre im $\mathbb{R}^3$ unter Verwendung von Kugelkoordinaten.

Lösung Die Einheitssphäre S^2 wird durch

$$\varphi: \ [0,1]^2 \to \partial B, \quad \varphi(s,t) = \begin{pmatrix} \sin(\pi s)\cos(2\pi t) \\ \sin(\pi s)\sin(2\pi t) \\ \cos(\pi s) \end{pmatrix}$$

bis auf eine Nullemnge bijektiv parametrisiert. Zu bestimmen ist das Flächenelement in diesen Koordinaten. Es ist

$$\begin{aligned} \varphi_s \times \varphi_t &= 2\pi^2 \sin(\pi s) \begin{pmatrix} \cos(\pi s)\cos(2\pi t) \\ \cos(\pi s)\sin(2\pi t) \\ -\sin(\pi s) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(2\pi t) \\ \cos(2\pi t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 2\pi^2 \sin(\pi s) \begin{pmatrix} \sin(\pi s)\cos(2\pi t) \\ \sin(\pi s)\sin(2\pi t) \\ \cos(\pi s) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der letzte Vektor hat die Länge 1, und $\sin(\pi s) \geqslant 0$ für $s \in [0,1]$. Also ist

$$\|\varphi_s \times \varphi_t\| = 2\pi^2 \sin(\pi s),$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} |S^2| = \int_{S^2} \mathrm{d}A &= 2\pi^2 \int_0^1 \int_0^1 \sin(\pi s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi^2 \int_0^1 \sin(\pi s)\,\mathrm{d}s = 4\pi, \end{aligned}$$

denn

$$\int_0^1 \sin(\pi s) = \frac{1}{\pi}\cos(\pi s)\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

2 Sei B die Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$. Man verifiziere die Identität

$$\int_B \Delta f\,\mathrm{d}V = \int_{\partial B} \frac{\partial f}{\partial n}\,\mathrm{d}A$$

durch direkte Berechnung beider Seiten für die Funktionen
a. $f_1 = x^2$. *b.* $f_2 = x^2 + y^2$ *c.* $f_3 = x^2 + y^2 + z^2$

▹ *Lösung* Zuerst die linke Seite. Es ist

$$\Delta f_k = 2k$$

und damit

$$\int_B \Delta f_k \,\mathrm{d}V = 2k \int_B \mathrm{d}V = 2k \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{8}{3}k\pi.$$

Fur die Berechnung der rechten Seite ist die Beobachtung wichtig, dass

$$n = x \qquad \text{auf } \partial B = S^2,$$

denn das macht die Rechnung einfach. Es ist dann

$$\frac{\partial f_k}{\partial n} = \langle \nabla f_k, n \rangle = \langle \nabla f_k, x \rangle = 2f_k.$$

Mit den Koordinaten der vorangehenden Aufgabe ist nun

$$\begin{aligned}\int_{\partial B} \frac{\partial f_1}{\partial n}\,\mathrm{d}A &= 2\int_{\partial B} x^2 \,\mathrm{d}A \\ &= 2\int_0^1\int_0^1 (\sin(\pi s)\cos(2\pi t)^2\, 2\pi^2 \sin(\pi s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &= 4\pi^2 \int_0^1 \sin^3(\pi s)\,\mathrm{d}s \int_0^1 \cos^2(2\pi t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Das letzte Integral ist $1/2$, das erste ergibt $4/3\pi$. Insgesamt ist damit

$$\int_{\partial B} \frac{\partial f_1}{\partial n}\,\mathrm{d}A = 4\pi^2 \cdot \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{3}\pi.$$

Aus Symmetriegründen liefern die Integrale über y^2 und z^2 dasselbe Ergebnis. Daher gilt

$$\int_{\partial B} \frac{\partial f_k}{\partial n}\,\mathrm{d}A = \frac{8}{3}k\pi,$$

wie es sein soll. ◃

3 Gegeben sei das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v(x,y,z) = \begin{pmatrix} y+z+1 \\ x+z+1 \\ x+y+1 \end{pmatrix}.$$

a. Untersuchen sie, ob v ein Gradientenvektorfeld ist, und bestimmen sie gegebenfalls ein Potential U.
b. Man besimmte

$$\int_M v \bullet \mathrm{d}\vec{s}$$

einmal direkt und einmal mit dem Satz von Stokes für den 1-Würfel $M = c(\mathbb{I})$,

$$c : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad c(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}.$$

▹ *Lösung* *a.* Ein differenzierbares Vektorfeld v auf dem $\mathbb{R}^3$ ist ein Gradientenfeld genau dann, wenn $\operatorname{rot} v = 0$. Dies ist der Fall:

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y+z+1 \\ x+z+1 \\ x+y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = 0.$$

Also existiert ein Potential U mit $\nabla U = v$. Dieses findet man durch sukzessives Lösen dieser ingesamt drei Gleichungen. Es ist

$$U_x = v_1 = y + z + 1,$$

somit

$$U = xy + zx + x + c(y,z),$$

denn die unbestimmte Konstante kann hier noch von y und z abhängen. Aus $U_y = v_2$ ergibt sich dann

$$U_y = x + c_y = z + x + 1,$$

also

$$c = yz + y + d(z).$$

Mit $U_z = v_3$ erhalten wir schließlich

$$U_z = x + y + d_z = x + y + 1,$$

also $d = z + \text{const}$. Ein Potential ist somit

$$U = x + y + z + xy + yz + zx.$$

b. Mit dem Potential U erhalten wir

$$\int_M v \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \int_M \mathrm{d}U = U\Big|_{c(0)}^{c(1)} = U(1,1,1) - U(0,0,0) = 6.$$

Eine direkte Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} \int_M v \bullet \mathrm{d}\vec{s} &= \int_c (y+z+1)\,\mathrm{d}x + .. + (x+y+1)\,\mathrm{d}z \\ &= 3\int_0^1 (2t+1)\,\mathrm{d}t \\ &= 3(t^2+1)\Big|_0^1 = 6, \end{aligned}$$

wie es sich gehört. ◃