Üb-2 8.11.2021

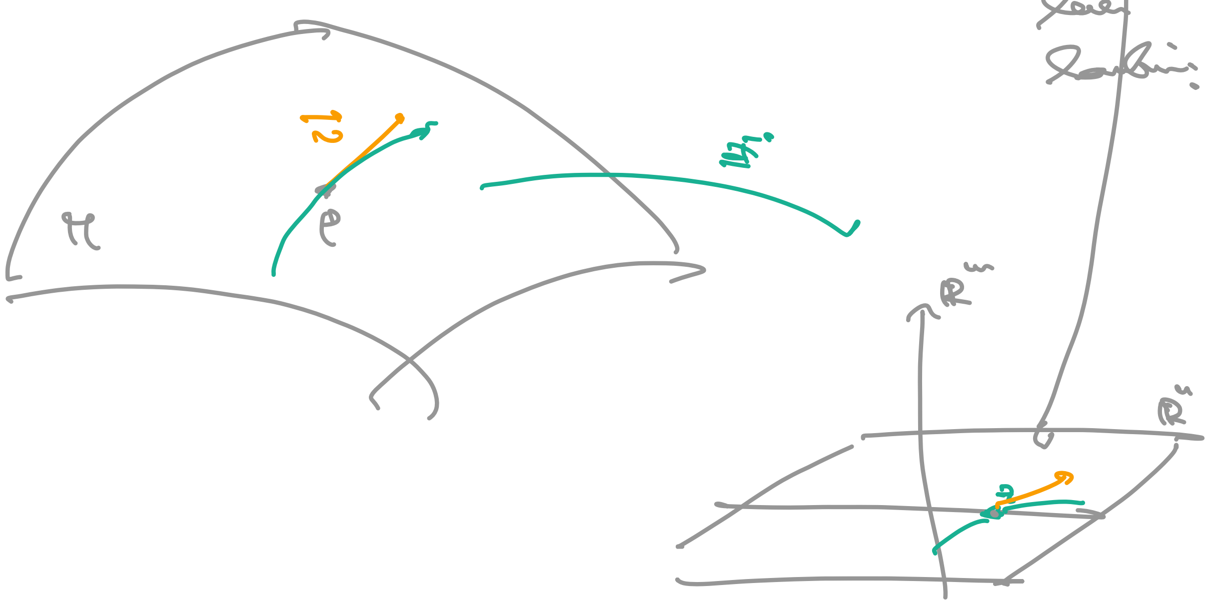
Frage:

$$T_pM = \ker Df(p) \qquad \text{für } M = f^{-1}(0)$$

Idee:

$$T_pM = \operatorname{span}\{\underbrace{\underbrace{D\varphi(x)\, e_i}_{\text{lineare unabhängig}}}_{\dim = n}\}$$

lokale Karte:



Ana-3 Vü-2

Ws 2021/22 04.11.21

1 Gegeben sind die Funktion

$$f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y,z) = x + y - z$$

und die Menge

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 4y^2 = 11 \wedge 4x = 3z\}.$$

a. Zeigen sie, dass M abgeschlossen und beschränkt ist, also kompakt.
b. Begründen sie, warum f auf M ein Minimum und ein Maximum besitzt.
c. Bestimmen sie diese Extremalstellen mit der Methode der Lagrangemultiplikatoren.

a.

$$\left.\begin{aligned} 2x^2 &\le 11 \\ 4y^2 &\le 11 \end{aligned}\right\} \quad |x|, |y| \le C$$

$$\left. z = \frac{4}{3}x \right\} \quad |z| \le C$$

⇒ M beschränkt.

M abgeschlossen, da Bedingungen stetig sind

b. f stetig, M kompakt

⟶ f|M nimmt Max und Min an.

c. NB:

$$2x^2 + 4y^2 - 11 = 0$$
$$4x - 3z = 0$$

Damit

$$\boxed{\begin{aligned} F = F(x,y,z,\lambda,\mu) &= \\ &= x + y - z - \lambda(2x^2 + 4y^2 - 11) \\ &\quad - \mu(4x - 3z) \end{aligned}}$$

$F_x: \quad 1 = 4\lambda x + 4\mu$

$F_y: \quad 1 = 8\lambda y$

$F_z: \quad -1 = -3\mu$

$F_\lambda: \quad 11 = 2x^2 + 4y^2$

$F_\mu: \quad 4x = 3z$

Solut.: $\mu = \frac{1}{3}, \quad z = \frac{4}{3}x,$

$4\lambda x = -\frac{1}{3}$

[illegible]:

$x = -\frac{1}{12\lambda}, \quad y = \frac{1}{8\lambda}$

[illegible]:

$11\lambda^2 = \frac{2}{144} + \frac{4}{64} =$

$= \frac{1}{72} + \frac{1}{16} = \frac{11}{144}$

$\Longrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{144}$

$\Longrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{12}$

[illegible]:

$\lambda = \mp\frac{1}{12} \quad x = \pm 1, \quad y = \mp\frac{3}{2}, \quad z = \pm\frac{4}{3}$

Zwei Kritische Punkte:

$P_1 = \left(1, -\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right), \quad P_2 = \left(-1, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}\right)$

$$\underbrace{f(P_1) = -\frac{\pi}{6}}_{\text{min}}, \quad \underbrace{f(P_2) = \frac{\pi}{6}}_{\text{max.}}$$

$\blacksquare$

2 Bestimmen Sie das Maximum und Minimum der Koordinate x für die Punkte in der Menge $D = A \cap B \subset \mathbb{R}^3$, wobei

$$A = \{x + y + z = 1\},$$
$$B = \{(x-1)^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4\}.$$

a. Stellen Sie zu diesem Problem die Lagrangefunktion auf sowie die *notwendigen* Gleichungen für das Vorliegen eines Extremums.
b. Lösen Sie diese Gleichungen.
c. Bestimmen Sie diejenigen Punkte, an denen ein Extremum vorliegt, und begründen Sie, dass es sich um Extrema handelt.

$$f(x,y,z) = x$$

NB:

$$x+y+z-1 = 0$$

a.

$$(x-1)^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4 = 0$$

Ans:

$$\boxed{L(x,y,z,\lambda,\mu) = x + \lambda(x+y+z-1) + \mu\left((x-1)^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4\right)}$$

$$\left.\begin{aligned}
L_x &= 1 + \lambda + 2\mu(x-1) &&= 0\\
L_y &= \lambda + 8\mu y &&= 0\\
L_z &= \lambda + 8\mu z &&= 0\\
L_\lambda &= x + y + z - 1 &&= 0
\end{aligned}\right\}$$

$$L_\mu = (x-1)^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4 = 0$$

b. $\mu = 0$ contradiction. So $\mu \neq 0$.

From equality $(1-3)$:

$$x - 1 = -\frac{\lambda+1}{2\mu}$$

$$y = z = -\frac{\lambda}{8\mu}.$$

Use equality :

$$-\frac{\lambda+1}{2\mu} - \frac{\lambda}{8\mu} - \frac{\lambda}{8\mu} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -4(\lambda+1) - 2\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = -\frac{2}{3}, \qquad \lambda+1 = \frac{1}{3}.$$

Use the second equality :

$$(x-1)^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4 = 0$$

So :

$$\frac{(\lambda+1)^2}{4\mu^2} + \frac{\lambda^2}{8\mu^2} = \frac{1}{36\mu^2} + \frac{4}{72\mu^2} = 4$$

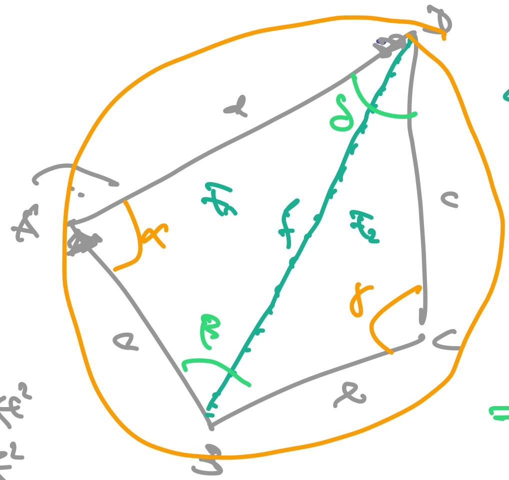
$$\Rightarrow \quad 4\mu^2 = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \quad \mu = \pm\frac{1}{4\sqrt{3}} = \pm\frac{1}{12}\sqrt{3}.$$

Therefore :

$$\left.\begin{aligned} x_{\pm} &= 1 \mp \frac{2}{\sqrt{3}} \\ y_{\pm} = z_{\pm} &= \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}\right\} \text{2 critical points.}$$

3 Zeigen Sie, dass von allen Vierecken mit gegebenen Seitenlängen diejenigen den größten Flächeninhalt haben, deren gegenüberliegende Winkel sich zu π addieren. *Anmerkung:* In diesem Fall liegen die Ecken eines Vierecks auf einem Kreis – es handelt sich um ein sogenanntes *Sehnenviereck*.



Kreis

$\vec a + \vec d = \vec f$

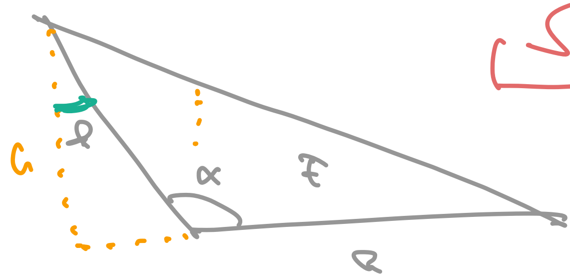
$\langle \vec a + \vec d, \vec a + \vec d \rangle = \langle \vec f, \vec f \rangle$

$\|a\|^2 + \|d\|^2 + 2\langle \vec a, \vec d \rangle = \|f\|^2$

$a^2 + d^2 + 2\langle \vec a, \vec d \rangle = f^2$

$\alpha + \gamma = 180°$

$\Rightarrow \beta + \delta = 180°$



Sehnenviereck

$2F = ah$

$= ad \cdot \sin\alpha$

Fläche:

$$2F = ad \cdot \sin\alpha + bc \sin\gamma$$

Kosinus:

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma$$

$$\Rightarrow (a^2 + d^2 - b^2 - c^2) = 2ad\cos\alpha - 2bc\cos\gamma$$

Exercise:

$$\boxed{2\Delta = ad \sin\alpha + bc \sin\gamma}$$

$$\Rightarrow \quad 16\Delta^2 = 4a^2d^2 \sin^2\alpha + 4b^2c^2 \sin^2\gamma + 8abcd \sin\alpha \sin\gamma$$

and

$$(\ \ -\ \ )^2 = 4a^2d^2 \cos^2\alpha + 4b^2c^2 \cos^2\gamma - 8abcd \cos\alpha \cos\gamma$$

Jetzt (+) :

$$\boxed{16\Delta^2 + (\ \ -\ \ )^2 = \boxed{4a^2d^2 + 4b^2c^2} - 8abcd \cos(\alpha+\gamma)}$$

$$\cos\alpha \cos\gamma - \sin\alpha \sin\gamma = \cos(\alpha+\gamma)$$

Also:

$$16\Delta^2 = \boxed{} - (\ \ -\ \ )^2 - 8abcd \cos(\alpha+\gamma)$$

ist maximal, wenn

$$\cos(\alpha+\gamma) = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha+\gamma = \pi = 180^\circ$$