1 Gegeben sind die Funktion

$$f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y,z) = x + y - z$$

und die Menge

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 4y^2 = 11 \wedge 4x = 3z\}.$$

a. Zeigen sie, dass M abgeschlossen und beschränkt ist, also kompakt.
b. Begründen sie, warum f auf M ein Minimum und ein Maximum besitzt.
c. Bestimmen sie diese Extremalstellen mit der Methode der Lagrangemultiplikatoren.

2 Bestimmen Sie das Maximum und Minimum der Koordinate x für die Punkte in der Menge $D = A \cap B \subset \mathbb{R}^3$, wobei

$$A = \{x + y + z = 1\},$$
$$B = \{(x-1)^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4\}.$$

a. Stellen Sie zu diesem Problem die Lagrangefunktion auf sowie die *notwendigen* Gleichungen für das Vorliegen eines Extremums.
b. Lösen Sie diese Gleichungen.
c. Bestimmen Sie diejenigen Punkte, an denen ein Extremum vorliegt, und begründen Sie, dass es sich um Extrema handelt.

3 Zeigen Sie, dass von allen Vierecken mit gegebenen Seitenlängen diejenigen den größten Flächeninhalt haben, deren gegenüberliegende Winkel sich zu π addieren. *Anmerkung:* In diesem Fall liegen die Ecken eines Vierecks auf einem Kreis – es handelt sich um ein sogenanntes *Sehnenviereck*.

1 Gegeben sind die Funktion

$$f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y,z) = x + y - z$$

und die Menge

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 4y^2 = 11 \wedge 4x = 3z\}.$$

a. Zeigen sie, dass M abgeschlossen und beschränkt ist, also kompakt.
b. Begründen sie, warum f auf M ein Minimum und ein Maximum besitzt.
c. Bestimmen sie diese Extremalstellen mit der Methode der Lagrangemultiplikatoren.

▷ *Lösung* *a.* Aufgrund der ersten Bedingung ist zum Beispiel $|x| \leqslant 3$ und $|y| \leqslant 2$. Aus der zweiten Bedingung folgt dann auch noch $|z| \leqslant 4|x|/3 \leqslant 4$. Also ist M beschränkt. Die Menge M ist abgeschlossen, da sie der Durchschnitt der Niveaumengen zweier stetiger Funktionen ist.
b. Jede stetige reelle Funktion nimmt aufeiner kompakten Menge ihr Minimum und ihr Maximum an.
c. Schreiben wir die Nebenbedingungen in der Form

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4y^2 - 11 &= 0, \\ 4x - 3z &= 0. \end{aligned}$$

so wird

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = (x + y - z) - \lambda(2x^2 + 4y^2 - 11) - \mu(4x - 3z).$$

Dies ergibt folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 1 &= 4\lambda x + 4\mu, \\ 1 &= 8\lambda y, \\ -1 &= -3\mu \\ 11 &= 2x^2 + 4y^2, \\ 4x &= 3z. \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort

$$\mu = \frac{1}{3}, \qquad z = \frac{4}{3}x, \qquad 4\lambda x = -\frac{1}{3}$$

Die vierte Gleichung ergibt damit

$$11\lambda^2 = \frac{2}{144} + \frac{4}{64} = \frac{11}{144},$$

also $\lambda = \pm 1/12$. Dies ergibt die Lösungen $p_1 = (1, -\frac{3}{2}, \frac{4}{3})$ und $p_2 = -p_1$. Wegen

$$f(p_1) = -\frac{11}{6}, \qquad f(p_2) = \frac{11}{6}$$

liegt bei p_1 das Minimum, bei p_2 das Maximum. ◁

2 Bestimmen Sie das Maximum und Minimum der Koordinate x für die Punkte in der Menge $D = A \cap B \subset \mathbb{R}^3$, wobei

$$\begin{aligned} A &= \{x + y + z = 1\}, \\ B &= \{(x-1)^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4\}. \end{aligned}$$

a. Stellen Sie zu diesem Problem die Lagrangefunktion auf sowie die *notwendigen* Gleichungen für das Vorliegen eines Extremums.
b. Lösen Sie diese Gleichungen.
c. Bestimmen Sie diejenigen Punkte, an denen ein Extremum vorliegt, und begründen Sie, dass es sich um Extrema handelt.

▹ *Lösung* *a.* Die zu maximierende Funktion ist $f(x, y, z) = x$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x + y + z - 1 &= 0, \\ (x-1)^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Die Lagrangefunktion lautet somit

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x + \lambda(x + y + z - 1) + \mu((x-1)^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4).$$

Die kritischen Punkte müssen daher folgende Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} L_x &= 1 + \lambda + 2\mu(x-1) &&= 0, \\ L_y &= \lambda + 8\mu y &&= 0, \\ L_z &= \lambda + 8\mu z &&= 0, \\ L_\lambda &= x + y + z - 1 &&= 0, \\ L_\mu &= (x-1)^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4 &&= 0. \end{aligned}$$

b. Wir können $\mu = 0$ ausschließen. Die ersten drei Gleichungen ergeben dann

$$x - 1 = -\frac{\lambda + 1}{2\mu}, \qquad y = z = -\frac{\lambda}{8\mu}.$$

Eingesetzt in die vierte Gleichungen erhalten wir

$$-\frac{\lambda + 1}{2\mu} - \frac{\lambda}{8\mu} - \frac{\lambda}{8\mu} = 0,$$

also

$$\lambda = -\frac{2}{3}, \qquad \lambda + 1 = \frac{1}{3}.$$

Mit der letzten Gleichung erhalten wir dann

$$\frac{(\lambda+1)^2}{4\mu^2} + \frac{\lambda^2}{8\mu^2} = \frac{1}{36\mu^2} + \frac{4}{72\mu^2} = 4$$

also $4\mu^2 = 1/12$ und damit

$$\mu = \mu_\pm = \pm\frac{1}{\sqrt{48}} = \pm\frac{1}{4\sqrt{3}}.$$

Damit wird

$$x_\pm = 1 \mp \frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad y_\pm = z_\pm = \pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$

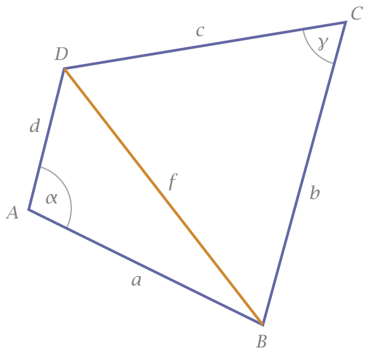
und wir erhalten zwei kritische Punkte,

$$P_\pm = \left(1 \mp \frac{2}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

c. Die Menge $A \cap B$ ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Somit nimmt die stetige Funktion f auf $A \cap B$ ihr Maximum und Minimum an. Diese kritischen Punkte müssen notwendigerweise an den beiden gefundenden kritischen Punkten $P_\pm$ liegen. Natürlich liegt das Minimum bei P_+ und das Maximum bei P_-. ◃

Abb 1

Allgemeines Viereck



3 Zeigen Sie, dass von allen Vierecken mit gegebenen Seitenlängen diejenigen den größten Flächeninhalt haben, deren gegenüberliegende Winkel sich zu π addieren. *Anmerkung:* In diesem Fall liegen die Ecken eines Vierecks auf einem Kreis – es handelt sich um ein sogenanntes *Sehnenviereck*.

▹ *Lösung* Mit den Bezeichnungen der Abbildung gilt für die Fläche A des Vierecks $ABCD$

$$2A = ad\sin\alpha + bc\sin\gamma.$$

Außerdem gilt für die Diagonale f aufgrund des allgemeinen Pythagoras

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma,$$

also

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2ad\cos\alpha + 2bc\cos\gamma.$$

Quadrieren der ersten und der letzten Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} 16A^2 &= 4a^2d^2\sin^2\alpha + 4b^2c^2\sin^2\gamma + 8abcd\sin\alpha\sin\gamma, \\ (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 &= 4a^2d^2\cos^2\alpha + 4b^2c^2\cos^2\gamma - 8abcd\cos\alpha\cos\gamma. \end{aligned}$$

Mit

$$\cos(\alpha + \gamma) = \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\cos\gamma$$

gilt also

$$16A^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4(a^2d^2 + b^2c^2) - 8abcd\cos(\alpha + \gamma).$$

Diese Identität reicht für unsere Belange bereits aus. Denn offensichtlich wird A maximal, wenn der Cosinusterm maximal wird, also $\alpha + \gamma = \pi$ gilt. Das aber bedeutet, dass die beiden Gegenwinkel α und γ sich zu 180° ergänzen. Dasselbe gilt dann auch für die beiden anderen Winkel, denn die Gesamtsumme der Winkel in einem konvexen Viereck ist 2π. Das ist aber auch genau die Eigenschaft, die ein Sehnenviereck auszeichnet. ◃