1 Sei $\alpha = \sum_{k=1}^{n} a_k \, dx_k$ geschlossen auf $\mathbb{R}^n$ mit positiv homogenen Koeffizienten vom Grad $\lambda \neq -1$; es ist also

$$(*) \qquad a_k(tx) = t^{\lambda} a_k(x), \qquad t > 0.$$

Dann definiert

$$f(x) = \frac{1}{1+\lambda} \sum_{k=1}^{n} x_k a_k(x) \qquad \lambda \neq -1$$

auf $\mathbb{R}^n$ eine Stammfunktion f von α.

Beweis:

$$\frac{d}{dt}\left(t^{\lambda} a_i(x)\right) = \lambda t^{\lambda-1} a_i(x)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(a_i(tx)\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_k}(tx)\, x_k$$

$$\overset{!}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_k}{\partial x_i}(tx)\, x_k \qquad \Big|\; t=1$$

geschl.

$$\Longrightarrow \boxed{\lambda a_i(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_k}{\partial x_i}(x)\, x_k}$$

f Stammfunktion:

$$(1+\lambda)\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k a_k(x)\right)$$

$$= a_i(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_k}{\partial x_i}(x)$$

$$= a_i(x) + \lambda a_i(x)$$

$$= (1+\lambda)\, a_i(x) \qquad 1+\lambda \neq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha_i(x), \quad 1 \le i \le n$$

$$\Longrightarrow \quad df = \alpha. \qquad \blacksquare$$

2 Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $\varphi\colon V \to U$ stetig differenzierbar. Einer 1-Form α auf U wird dann eine 1-Form $\varphi^*\alpha$ auf V zugeordnet durch

$$(\varphi^*\alpha)(y)(h) = \alpha(\varphi(y))(D\varphi(y)h).$$

a. Ist $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i\,\mathrm{d}x_i$ so ist

$$\varphi^*\alpha = \sum_{i=1}^n (a_i \circ \varphi)\mathrm{d}\varphi_i.$$

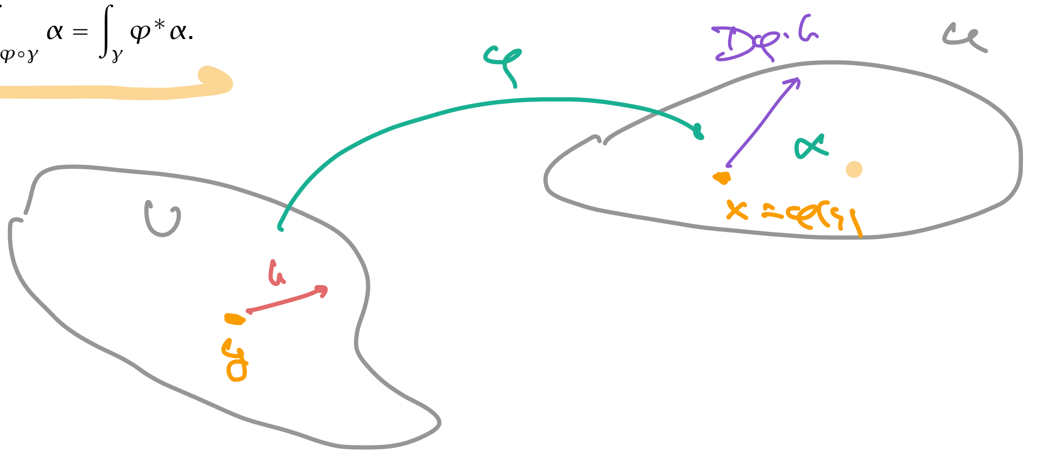
$\varphi(V) \subset U$

Drücken sie dies auch in der Basis $\mathrm{d}y_1, \dots, \mathrm{d}y_m$ aus.

b. Es gilt $\varphi^*\,\mathrm{d}f = \mathrm{d}(f \circ \varphi)$.

c. Ist γ eine C^1-Kurve in V, so gilt

$$\int_{\varphi\circ\gamma} \alpha = \int_\gamma \varphi^*\alpha.$$



α [illegible] auf U :

$$\underbrace{(\varphi^*\alpha)}_{\text{pull back von } \alpha}(y)(h) := \alpha(\varphi(y))(D\varphi(y)\cdot h)$$

φ^* ist linear in α.

a. Zunächst dx_i :

$$(\varphi^* dx_i)(h) = dx_i(D\varphi \cdot h) \qquad \text{i-te Komponente}$$

$$= D\varphi_i\, h$$

$$= d\varphi_i(h).$$

Also:

$$\varphi^* dx_i = d\varphi_i .$$

Damit

$$\varphi^*\alpha = \varphi^*\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, dx_i\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \varphi^*\big(a_i(x)\, dx_i\big) \qquad D\varphi_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_i\circ\varphi)\, \varphi^* dx_i \qquad = d\varphi_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_i\circ\varphi) \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}\, dy_k$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{n} (a_i\circ\varphi) \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k} \Big)\, dy_k$$

Also:

$$\varphi^*\alpha = \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{n} (a_i\circ\varphi) \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k} \Big)\, dy_k$$

$a_i(\varphi(y))$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_i\circ\varphi) \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k}\, dy_k$$

$d\varphi_i$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_i \circ \varphi)\, d\varphi_i$$

$$\varphi^* \alpha = \varphi^*\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, dx_i \Big) \qquad x = \varphi(y)$$

$$\overset{!}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i(\varphi(y))\, d\varphi_i(y)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \circ \varphi \;\, d\varphi_i \, . \qquad \checkmark$$

2. Für $\alpha = df$:

$$\varphi^* df = \varphi^*\Big(\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}\, dx_i \Big) \qquad \varphi^* dx_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_{x_i} \circ \varphi \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}\, dy_k \Big)$$

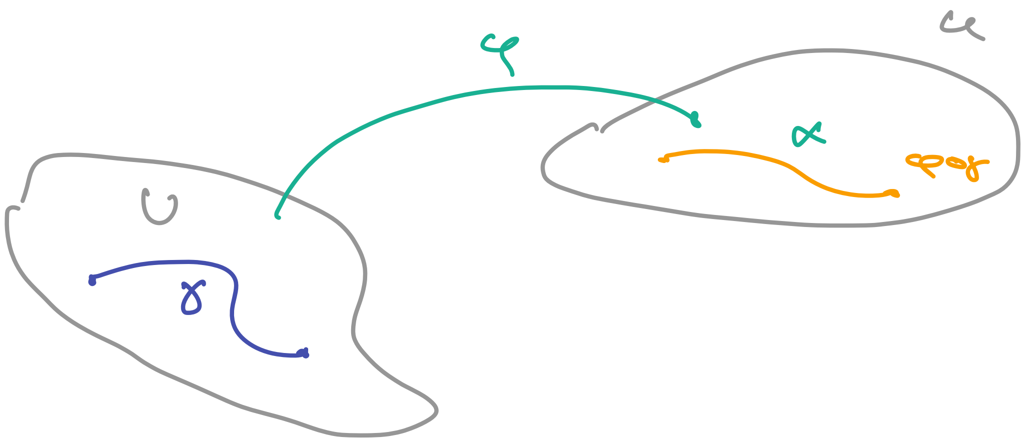
$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_{x_i} \circ \varphi \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}}_{\text{Kettenregel}} \Big)\, dy_k$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial y_k}}\, dy_k$$

$$= d(f \circ \varphi) \, .$$

$$\boxed{\varphi^* df = d(f \circ \varphi)} = d(\varphi^* f)$$

“ d and ∘ Rosenlein ”



$$\boxed{\int_\gamma \varphi^*\alpha \overset{!}{=} \int_{\varphi\circ\gamma}\alpha}$$

Dem :
$$\int_{(\varphi\circ\gamma)}\alpha = \int_a^b \underbrace{\alpha(\varphi\circ\gamma(t))}\cdot\underbrace{\frac{d}{dt}(\varphi\circ\gamma(t))}\,dt$$

$$= \int_a^b (\alpha\circ(\varphi\circ\gamma))(D\varphi(\gamma)\cdot\dot\gamma)\,dt$$

$$= \int_a^b ((\underbrace{\alpha\circ\varphi})\circ\gamma)(\underbrace{D\varphi}\circ\gamma)\,\dot\gamma\,dt$$

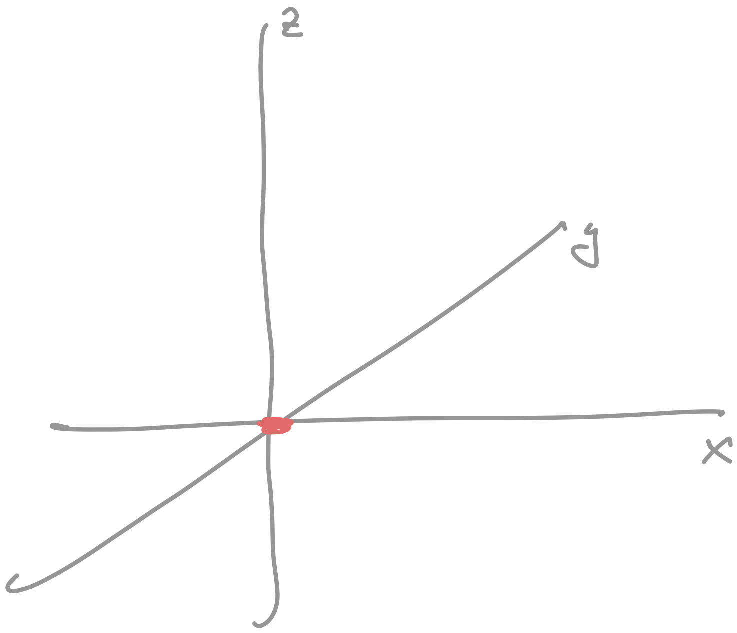
$$= \int_a^b (\underbrace{(\underline{\varphi^*\alpha})\circ\gamma})\,\underbrace{\dot\gamma(t)\,dt} = \int_\gamma \varphi^*\alpha.$$

✓

Ana-3 Vü-3.3

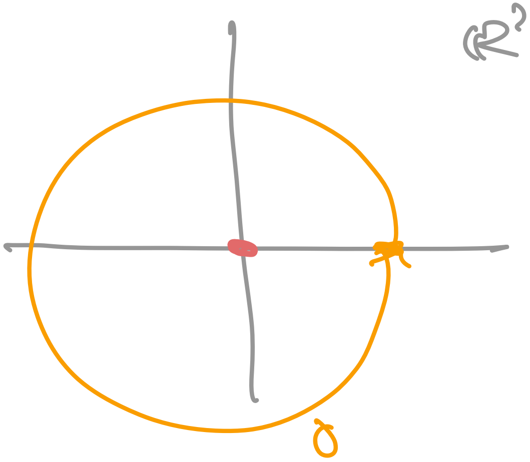
Ws 2021/22 11.11.21

3 *a.* Jede geschlossene stetige Kurve in einem Gebiet ist *in diesem Gebiet* homotop zu einem Polygon.
b. Sei $n \geqslant 3$. Trifft ein Polygon im $\mathbb{R}^n$ den Nullpunkt nicht, so gibt es auch eine Nullpunktsgerade, der das Polygon nicht trifft.
c. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist für $n \geqslant 3$ einfach zusammenhängend, für $n = 2$ nicht.



1-zshg.

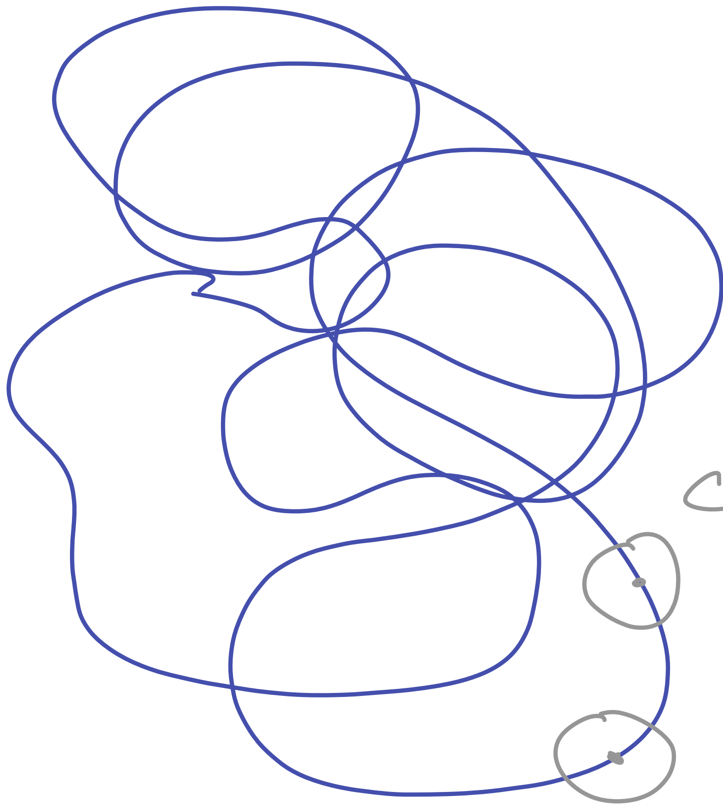
$n=2$



$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht 1-zshg.

$$\int_\gamma \omega = 2\pi \neq 0$$

a. $n \geq 3$:

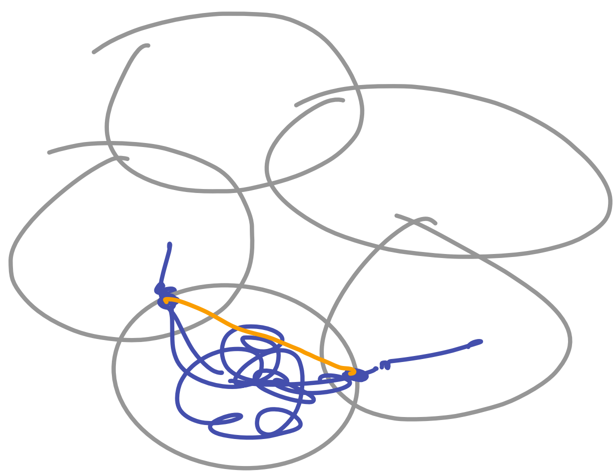


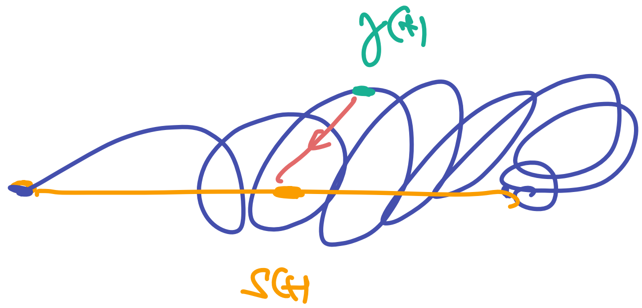
stetige Kurve γ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$\gamma \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

ist kompakt,

hat so eine endliche Teilüberdeckung:



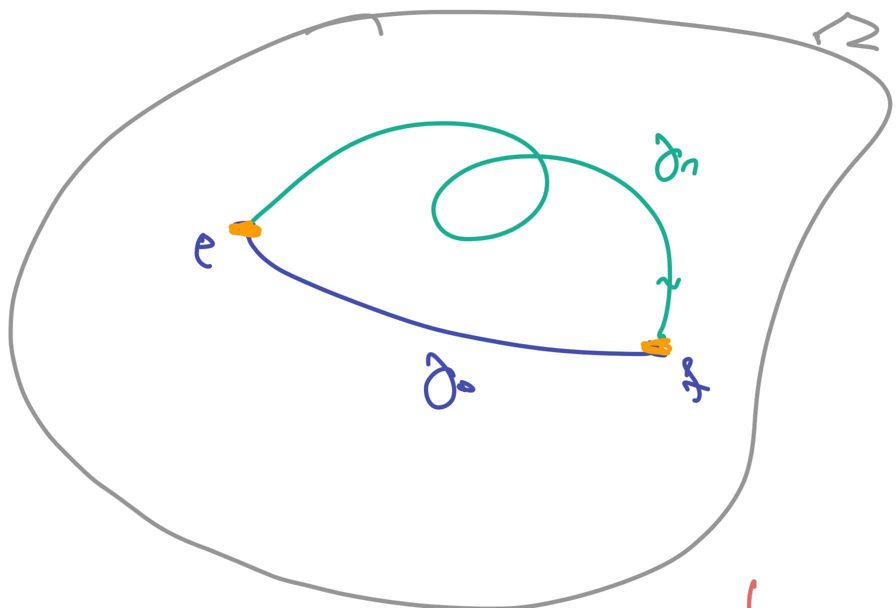


Homotopie :

$$\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \longrightarrow \Omega$$

$\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$

...



Es gibt

$$H : [0,1] \times [a,b] \longrightarrow \Omega$$

$$(s, t) \longmapsto H(s,t)$$

!

$H_0 = H(0,\cdot) = \gamma_0$, Abb. 1

$H_s(a) = e$, $H_s(b) = f$, $0 \le s \le 1$.

z.B. $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$= \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

nicht
konvex