1 Sei $\alpha = \sum_{k=1}^{n} a_k \, dx_k$ geschlossen auf $\mathbb{R}^n$ mit positiv homogenen Koeffizienten vom Grad $\lambda \neq -1$; es ist also

$$a_k(tx) = t^\lambda a_k(x), \qquad t > 0.$$

Dann definiert

$$f(x) = \frac{1}{1+\lambda} \sum_{k=1}^{n} x_k a_k(x)$$

auf $\mathbb{R}^n$ eine Stammfunktion $f$ von $\alpha$.

2 Seien $U \subset \mathbb{R}^m$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi \colon U \to V$ stetig differenzierbar. Einer 1-Form $\alpha$ auf $V$ wird dann eine 1-Form $\varphi^*\alpha$ auf $U$ zugeordnet durch die Definition

$$(\varphi^*\alpha)(y)(h) = \alpha(\varphi(y))(D\varphi(y)h).$$

*a.* Ist $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \, dx_i$ so ist

$$\varphi^*\alpha = \sum_{i=1}^{n} (a_i \circ \varphi) d\varphi_i.$$

*b.* Drücken sie dies auch in der Basis $dy_1, \dots, dy_m$ aus.
*c.* Es gilt $\varphi^* df = d(f \circ \varphi)$.
*d.* Ist $\gamma$ eine $C^1$-Kurve in $V$, so gilt

$$\int_{\varphi\circ\gamma} \alpha = \int_\gamma \varphi^*\alpha.$$

3 *a.* Jede geschlossene stetige Kurve in einem Gebiet ist *in diesem Gebiet* homotop zu einem Polygon.
*b.* Sei $n \geqslant 3$. Trifft ein Polygon im $\mathbb{R}^n$ den Nullpunkt nicht, so gibt es auch eine Nullpunktsgerade, der das Polygon nicht trifft.
*c.* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist für $n \geqslant 3$ einfach zusammenhängend, für $n = 2$ nicht.

1 Sei $\alpha = \sum_{k=1}^n a_k \,\mathrm{d}x_k$ geschlossen auf $\mathbb{R}^n$ mit positiv homogenen Koeffizienten vom Grad $\lambda \neq -1$; es ist also

$$a_k(tx) = t^\lambda a_k(x), \qquad t > 0.$$

Dann definiert

$$f(x) = \frac{1}{1+\lambda} \sum_{k=1}^n x_k a_k(x)$$

auf $\mathbb{R}^n$ eine Stammfunktion $f$ von $\alpha$.

*Lösung* Aus der Homogenitätsgleichung und der Geschlossenheit von $\alpha$ folgt durch Differenzieren nach $t$

$$\begin{aligned} \lambda t^{\lambda-1} a_i(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_i(tx)}{\partial x_k} x_k \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_k(tx)}{\partial x_i} x_k. \end{aligned}$$

Auswerten bei $t = 1$ ergibt also

$$\lambda a_i(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_k(x)}{\partial x_i} x_k.$$

Damit erhalten wir für die partiellen $f$-Ableitungen

$$\begin{aligned} (1+\lambda)\frac{\partial f}{\partial x_i} &= \partial_i \sum_{k=1}^n x_k a_k(x) \\ &= a_i + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_k(x)}{\partial x_i} x_k \\ &= (1+\lambda) a_i. \end{aligned}$$

Im Fall $\lambda \neq -1$ ist also $f_{x_i} = a_i$ und damit

$$\mathrm{d}f = \alpha.$$

2 Seien $U \subset \mathbb{R}^m$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi\colon U \to V$ stetig differenzierbar. Einer 1-Form $\alpha$ auf $V$ wird dann eine 1-Form $\varphi^*\alpha$ auf $U$ zugeordnet durch die Definition

$$(\varphi^*\alpha)(y)(h) = \alpha(\varphi(y))(D\varphi(y)h).$$

*a.* Ist $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \, \mathrm{d}x_i$ so ist

$$\varphi^*\alpha = \sum_{i=1}^n (a_i \circ \varphi)\mathrm{d}\varphi_i.$$

*b.* Drücken sie dies auch in der Basis $\mathrm{d}y_1, \dots, \mathrm{d}y_m$ aus.

*c.* Es gilt $\varphi^* \, \mathrm{d}f = \mathrm{d}(f \circ \varphi)$.

*d.* Ist $\gamma$ eine $C^1$-Kurve in $V$, so gilt

$$\int_{\varphi\circ\gamma} \alpha = \int_\gamma \varphi^*\alpha.$$

▹ *Lösung* *a.* Es ist definitionsgemäß

$$(\varphi^*\alpha)(h) = \sum_{i=1}^n (a_i \circ \varphi) \, \mathrm{d}x_i(D\varphi \cdot h)$$

und weiter

$$(\mathrm{d}x_i)(D\varphi \cdot h) = ((D\varphi)h)_i = D\varphi_i \cdot h = \mathrm{d}\varphi_i(h).$$

Also ist

$$\varphi^*\alpha = \sum_{i=1}^n (a_i \circ \varphi) \, \mathrm{d}\varphi_i.$$

*b.* Dies ergibt sich aus

$$\mathrm{d}\varphi_i = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \, \mathrm{d}y_k.$$

Das Ergebnis ist

$$\varphi^*\alpha = \sum_{k=1}^m \left( \sum_{i=1}^n (a_i \circ \varphi) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \right) \mathrm{d}y_k.$$

*c.* Mit der vorangehenden Formel ist

$$\begin{aligned}
\varphi^*\mathrm{d}f &= \sum_{k=1}^m \left( \sum_{i=1}^n (f_{x_i} \circ \varphi) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \right) \mathrm{d}y_k \\
&= \sum_{k=1}^m \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial y_k} \, \mathrm{d}y_k \\
&= \mathrm{d}(f \circ \varphi).
\end{aligned}$$

*d.* Es ist

$$\begin{aligned}\int_{\varphi\circ\gamma}\alpha &= \int_a^b (\alpha\circ\varphi\circ\gamma)(D\varphi(\gamma)\cdot\dot\gamma)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b ((\alpha\circ\varphi)\circ\gamma)(D\varphi(\gamma)\cdot\dot\gamma\,\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b (\varphi^*\alpha\circ\gamma)(\dot\gamma)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_\gamma \varphi^*\alpha. \quad ◁\end{aligned}$$

3 *a.* Jede geschlossene stetige Kurve in einem Gebiet ist *in diesem Gebiet* homotop zu einem Polygon.
*b.* Sei $n \geqslant 3$. Trifft ein Polygon im $\mathbb{R}^n$ den Nullpunkt nicht, so gibt es auch eine Nullpunktsgerade, der das Polygon nicht trifft.
*c.* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist für $n \geqslant 3$ einfach zusammenhängend, für $n = 2$ nicht.

▹▸ *Lösung* *a.* Eine geschlossene stetige Kurve ist eine kompakte Menge. Es existiert deshalb eine endlich Überdeckung durch offene Kugeln, welche sämtlich im vorgegebenen Gebiet enthalten sind. Innerhalb jeder einzelnen Kugel kann man nun problemlos die Kurve stetig in ein Geradensegment deformieren, siehe das Beispiel auf Seite 151.
*b.* Jede Seite des Polygons definiert eine eindeutige Ebene durch den Nullpunkt. Diese endlich vielen Ebenen füllen den Raum nicht aus, wenn $n \geqslant 3$. Somit gibt es eine Nullpunktsgerade, die diese Ebenen nur im Nullpunkt trifft und *nicht* das Polygon.
*c.* Sei $\gamma$ eine beliebige geschlossene Kurve im $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $n \geqslant 3$. Dann können wir $\gamma$ zuerst in ein Polygin deformieren, ohne dabei den Nullpunkt zu treffen. Dann wählen wir eine Nullpunktsgerade, die dieses Polygon nicht trifft, und ziehen dieses linear auf einen Punkt dieser Geraden zusammen. In dieser Punkt nicht Null, so wirdauch bei dieser Zusammenziehung der Nullpunkt nicht getroffen. Also ist $\gamma$ nullthomotop.

Dagegen ist $\mathbb{R}^@ \setminus \{0\}$ nicht einfach zusammenhängend, weil das Integral der geschlossenen Windungsform um den Nullpunkt herum nicht Null ist. ◂◃