1 Eine durch eine diskrete Masseverteilung m induzierte Intervallfunktion ist regulär.

$\Lambda \subset \mathbb{R}^n$: diskret,

$\Lambda \cap K$ endlich für jedes kompakte $K \subset \mathbb{R}^n$.

Zur.

$m : \Lambda \to [0, \infty)$

$\rightsquigarrow$ μ_m :

$$\mu_m(I) = \sum_{p \in \Lambda \cap I} m(p).$$

≥ 0,

monoton.

Beweis zu zeigen: Zu jedem $I \in \mathcal{J}^n$ & $\varepsilon > 0$ ex. offenes Intervall $I^* \supset I$:

$$\mu_m(I^*) < \mu_m(I) + \varepsilon.$$

Sei also $I \in \mathcal{J}^n$:

$$I = I^1 \times \dots \times I^n.$$

Schreibe:

$$I = J \times K.$$

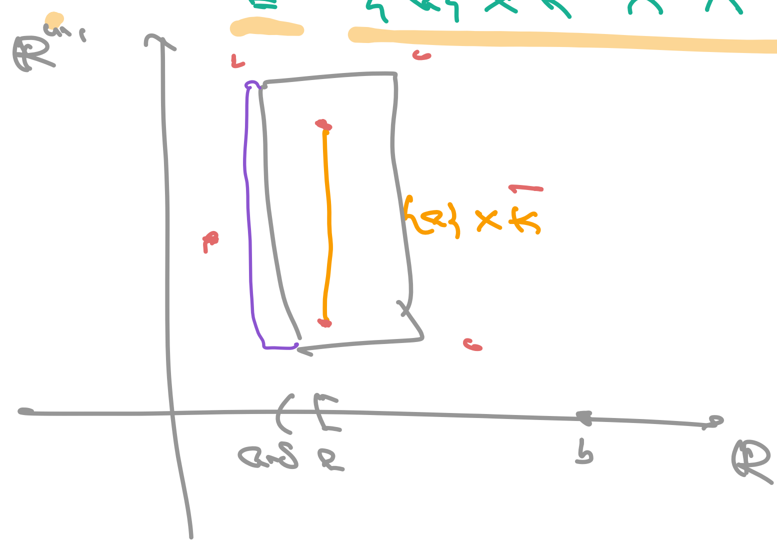
Ist J offen, dann nichts zu tun.

Angenommen, J links abgeschlossen:

$$J = [a, b\rangle \quad (\ ) \text{ oder }]$$

Betrachte $\{a\} \times \bar{K}$ kompakt.

Dann ex. $\delta > 0$: $(a-\delta, a] \times \bar{K} \cap A = \{a\} \times \bar{K} \cap A$



$$\min_{p \in A \setminus \{a\} \times \bar{K}} \operatorname{dist}(p, \{a\} \times \bar{K}) = 2\delta > 0$$

Also:
$$(a-\varepsilon, a] \times K \cap A = \{a\} \times K \cap A$$

Also für $J^* = (a-\varepsilon, b\rangle$:

$$\mu_n(J^* \times K) = \mu_n(J \times K). \qquad \square$$

2 Beweisen sie folgende Behauptungen: $\subset \mathbb{R}^n$

a. Jede endliche, oder abzählbare Menge ist eine λ-Nullmenge.

b. Insbesondere ist $\mathbb{Q}$ eine λ-Nullmenge in $\mathbb{R}$.

c. Jedes entartete Intervall ist eine λ-Nullmenge.

d. Jede Hyperebene ist eine λ-Nullmenge.

e. Der Graph einer stetigen Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine λ-Nullmenge in $\mathbb{R}^{n+1}$.

a. $\lambda(\{a\}) = 0$

$\Rightarrow$ abzählbare Vereinigung von λ-Null-Menge ist λ-Nullmenge

$\Rightarrow$ abzählbare Mengen haben λ-Maß 0.

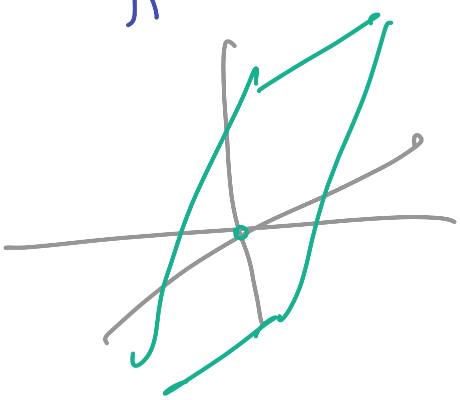
b. Insbesondere $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$,

also auch

$\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$

c. ✓

d. Jede Hyperebene:



Das folgt aus 2),

also Hyperebene

= Graph einer affinen f.

$$a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \langle v, x \rangle + b$$

2. Graph einer stetigen Funktion

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

ist λ-Nullmenge in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Bew: Zerlege $\mathbb{R}^n$ in abzählbar viele Würfel der Kantenlänge 1.

Also betrachte

$$f : W = \underbrace{[0,1]^n}_{\text{kompakt}} \to \mathbb{R}$$

stetig:

$\Rightarrow$ glm. stetig:

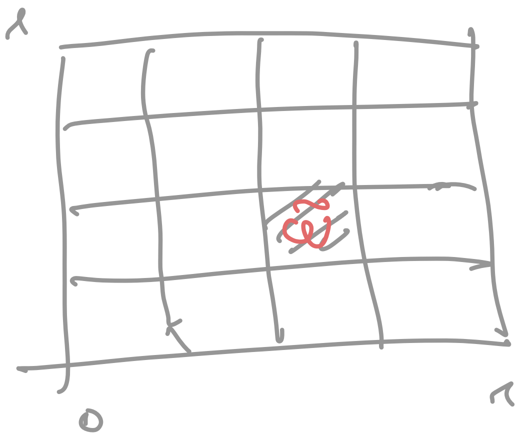
[illegible] $\varepsilon > 0$ ex. [illegible] $N \geq 1$:

$$|u-v| < \frac{1}{N} \Longrightarrow |f(u)-f(v)| < \varepsilon$$

[illegible] W [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

N [illegible] [illegible]:



[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] f [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] $\tilde{W} \times I$, $|I| < \varepsilon$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:

[illegible] [illegible]

$$\sum_{\tilde{W} \subset W} \lambda(\tilde{W} \times I) \leq \underbrace{\sum_{\tilde{W} \subset W} \lambda(\tilde{W}) \cdot \varepsilon}$$

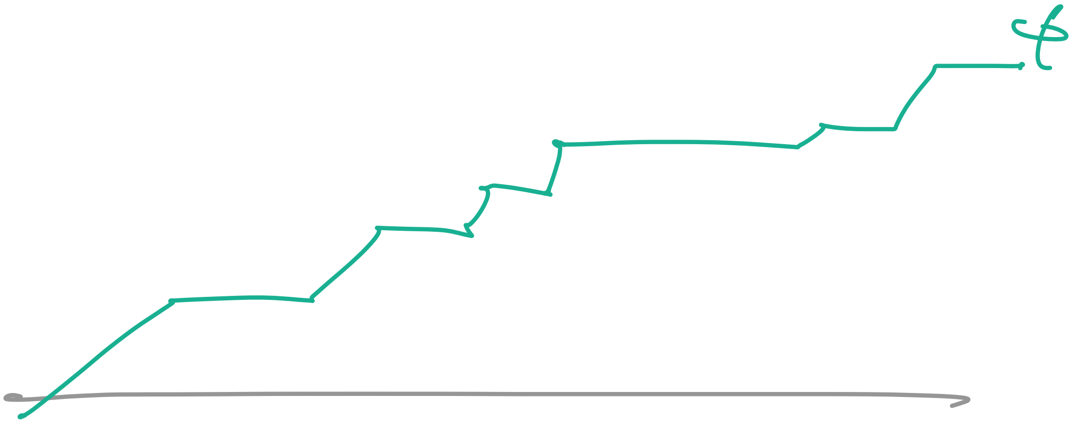
$$= \mu(W) \cdot \varepsilon$$

$$= \varepsilon.$$

3 Sei $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton steigend, und seien ϕ_+, ϕ_- die Funktionen der rechts- und linksseitigen Grenzwerte von ϕ in jedem Punkt. Definiere damit eine Intervallfunktion μ_ϕ wie im Skript durch

$$\boxed{\begin{aligned}\mu_\varphi([a,b]) &\coloneqq \varphi_+(b) - \varphi_-(a),\\ \mu_\varphi([a,b)) &\coloneqq \varphi_-(b) - \varphi_-(a)\end{aligned}}$$

und so weiter. Zeigen sie, dass damit ein Maß auf $\mathcal{J}^1$ definiert wird.



Sei: $\mu = \mu_\phi$.

a) $\mu(I) \geq 0$, $I \in \mathcal{J}^1$

weg Monotonie von ϕ

z.z.: $\mu(\{a\})$

$= \mu([a,a])$

$= \underbrace{\phi_+(a) - \phi_-(a)}_{\geq 0}$

b) μ ist additiv:

$I_1 \cap I_2 = \emptyset$

$I_1, I_2 \in \mathcal{J}^1, \quad I_1 \cup I_2 \in \mathcal{J}^1$:

$\langle a, b] \cup (b, c\rangle \qquad (\quad \rangle =) \quad]$

~~Dann~~

$$\mu(\langle a, b] \cup (b, c\rangle)$$

$$= \mu(\langle a, c\rangle)$$

$$= \Phi_I(c) - \Phi_I(a)$$

und

$$\mu(\langle a, b]) + \mu((b, c\rangle)$$

$$= \Phi_I(b) - \Phi_I(a) + \Phi_I(c) - \Phi_I(b)$$

$$= \Phi_I(c) - \Phi_I(a)$$

c. Regulär: • Sei b rechter Randpunkt.

$\alpha)$ $I = \langle a, b)$ obdA.

$\beta)$ $I = \langle a, b]$, $\varepsilon > 0$.

$\Phi_+(b)$

Dann gilt:

Zu ε gibt $\delta > 0$:

$$\Phi_+(b) \le \Phi(t) < \Phi_+(b) + \varepsilon, \quad b < t < b+\delta$$

Für diese t gilt dann:

$$\begin{aligned}
\mu(\langle a, t)) &= \Phi_-(t) - \Phi_\pm(a) \\
&\le \Phi(t) - \Phi_\pm(a) \\
&< \Phi_+(b) + \varepsilon - \Phi_\pm(a) \\
&= \mu(\langle a, b]) + \varepsilon .
\end{aligned}$$

Also ist μ regulär. $\blacksquare$

$\subset \mathbb{R}^n$

4 Sei μ ein Maß und N eine μ-Nullmenge. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ auch eine Überdeckung von N durch *offene* Intervalle $I_1, I_2, \dots$ so, dass

$$\sum_{k \geqslant 1} \mu(I_k) < \varepsilon.$$

Bew: Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. eine Überdeckung von N durch Intervalle $(J_k)_{k\geq 1}$:

Gemäß Def.

$$\sum_{k\geq 1} \mu(J_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da μ regulär: zu jedem J_k ex. offenes Intervall $J_k^* \supset J_k$ mit

$$\mu(J_k^*) < \mu(J_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Dann (J_k^*) offene Überdeckung von N und

$$\sum_{k\geq 1} \mu(J_k^*) \leq \sum_{k\geq 1}\left(\mu(J_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)$$

$$\leq \sum_{k\geq 1} \mu(J_k) + \sum \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon.$$