1 Eine durch eine diskrete Masseverteilung m induzierte Intervallfunktion ist regulär.

2 Beweisen sie folgende Behauptungen:

a. Jede endliche, oder abzählbare Menge ist eine λ-Nullmenge.
b. Insbesondere ist $\mathbb{Q}$ eine λ-Nullmenge in $\mathbb{R}$.
c. Jedes entartete Intervall ist eine λ-Nullmenge.
d. Jede Hyperebene ist eine λ-Nullmenge.
e. Der Graph einer stetigen Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine λ-Nullmenge in $\mathbb{R}^{n+1}$.

3 Sei $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton steigend, und seien ϕ_+, ϕ_- die Funktionen der rechts- und linksseitigen Grenzwerte von ϕ in jedem Punkt. Definiere damit eine Intervallfunktion μ_ϕ wie im Skript durch

$$\mu_\varphi([a,b]) \coloneqq \varphi_+(b) - \varphi_-(a),$$
$$\mu_\varphi([a,b)) \coloneqq \varphi_-(b) - \varphi_-(a)$$

und so weiter. Zeigen sie, dass damit ein Maß auf $\mathcal{J}^1$ definiert wird.

4 Sei μ ein Maß und N eine μ-Nullmenge. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ auch eine Überdeckung von N durch *offene* Intervalle $I_1, I_2, ..$ so, dass

$$\sum_{k\geqslant 1} \mu(I_k) < \varepsilon.$$

1 Eine durch eine diskrete Masseverteilung m induzierte Intervallfunktion ist regulär.

▹▸ *Lösung* Sei $I = I^1 \times .. \times I^n$ ein beschränktes Intervall. Wir gehen induktiv vor und betrachten jeweils eine Seite von I. Wir beginnen mit der ersten Seite und schreiben

$$I = J \times K, \qquad J = I^1, \qquad K = I^2 \times .. \times I^n.$$

Ist J offen, so tun wir nichts.

Ist J linksseitig abgeschlossen mit Randpunkt a, so betrachte $\{a\} \times \bar{K}$. diese Menge ist kompakt, und da Λ diskret ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so das

$$(a - \varepsilon, a] \times \bar{K} \cap \Lambda = \{a\} \times \bar{K} \cap \Lambda.$$

Das bedeutet aber, dass auch

$$(a - \varepsilon, a] \times K \cap \Lambda = \{a\} \times K \cap \Lambda.$$

Und das wiederum bedeutet, dass

$$m(J' \times K) = m(J \times K), \qquad J' = (a - \varepsilon, a] \cup J.$$

Entsprechend verfahren wir, wenn J rechtsseitig abgeschlossen ist.

Im Ergebnis können wir also J durch ein offenes Intervall $J^* \supset J$ so ersetzen, dass

$$m(J^* \times K) = m(J \times K).$$

Verfahren wir so in jeder einzelnen Dimension, erhalten wir ein offenes Intervall I^* mit

$$I^* \supset I, \qquad m(I^*) = m(I).$$

Damit ist m natürlich regulär. ◂◃

2 Beweisen sie folgende Behauptungen:
a. Jede endliche, oder abzählbare Menge ist eine λ-Nullmenge.
b. Insbesondere ist $\mathbb{Q}$ eine λ-Nullmenge in $\mathbb{R}$.
c. Jedes entartete Intervall ist eine λ-Nullmenge.
d. Jede Hyperebene ist eine λ-Nullmenge.
e. Der Graph einer stetigen Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine λ-Nullmenge in $\mathbb{R}^{n+1}$.

⊳ *Lösung* *a.* Eine Ein-Punkt-Menge ist ein entartetes Intervall mit Maß 0. Also ist sie eine Nullmenge. Eine abzählbare Menge ist somit eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen, also ebenfalls eine Nullmenge.
b. $\mathbb{Q}$ ist abzählbar und deshalb eine Nullmenge.
c. Ein Intervall ist entartet, wenn eine Seite Länge 0 hat. Dann ist aber auch das Maß des gesamten Intervalls 0.
d. Jede Hyperebene kann als Graph einer linearen Funktion $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ dargestellt werden. Die Behauptung folgt dann aus dem folgenden Punkt.
e. Wir können den Graphen als abzählbare Vereinigung von Graphen von stetigen Funktionen über Würfeln der Kantenlänge 1 darstellen. Es genügt deshalb, die Behauptung für $W = [0,1]^n$ und den Graphen einer stetigen Funktion

$$f : W \to \mathbb{R}$$

zu beweisen. — Sei also $\varepsilon > 0$. Da f auf der kompakten Menge W gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$|u - v| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(u) - f(v)| < \varepsilon$$

für $u, v \in W$. Zerlegen wir also W in gleich große Teilwürfel $\tilde{W}$ mit Kantenlänge $< \delta$, so kann auf jedem dieser Teilwürfel der Graph in einem Intervall $\tilde{I}$ mit Basis $\tilde{W}$ und Höhe ε eingeschlossen werden. Also ist

$$\lambda_{n+1}(\tilde{I}) = \varepsilon \lambda_n(\tilde{W}).$$

Die Familie dieser endlich vielen Intervalle überdeckt den Graphen von f, und ihr Gesamtmaß ist kleiner als

$$\sum \varepsilon \lambda_n(tW) = \varepsilon \lambda_n(W) = \varepsilon. \quad ⊲$$

3 Sei $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton steigend, und seien ϕ_+, ϕ_- die Funktionen der rechts- und linksseitigen Grenzwerte von ϕ in jedem Punkt. Definiere damit eine Intervallfunktion μ_ϕ wie im Skript durch

$$\begin{aligned}
\mu_\varphi([a,b]) &\coloneqq \varphi_+(b) - \varphi_-(a),\\
\mu_\varphi([a,b)) &\coloneqq \varphi_-(b) - \varphi_-(a)
\end{aligned}$$

und so weiter. Zeigen sie, dass damit ein Maß auf $\mathcal{J}^1$ definiert wird.

Lösung Sei $\mu = \mu_\phi$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mu(\langle a,b] \cup (b,c\rangle) &= \phi_\pm(c) - \phi_+(b) + \phi_+(b) - \phi_\pm(a)\\
&= \phi_\pm(c) - \phi_\pm(a)\\
&= \mu(\langle a,c\rangle),
\end{aligned}$$

und entsprechend für $\mu(\langle a,b) \cup [b,c\rangle)$. Also ist μ additiv. Außerdem ist μ nichtnegativ, denn alle in der obigen Definition auftretenden Ausdrücke sind aufgrund der Monotonie von φ nichtnegativ. Also ist μ auch monoton.

Um die Regularität zu zeigen, betrachten wir oBdA den rechten Randpunkt b eines Intervalls I. Für $I = \langle a,b)$ ist nichts zu tun. Sei also $I = \langle a,b]$ und $\varepsilon > 0$. Aufgrund der Definition des rechtsseitigen Grenzwertes existiert ein δ, so dass

$$\phi_+(b) \leqslant \phi(t) < \phi_+(b) + \varepsilon, \qquad b < t < b + \delta.$$

Für jedes solche t gilt dann auch

$$\begin{aligned}
\mu(\langle a,t)) &= \phi_-(t) - \phi_\pm(a)\\
&\leqslant \phi(t) - \phi_\pm(a)\\
&< \phi_+(b) - \phi_\pm(a) + \varepsilon\\
&= \mu(\langle a,b]) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also ist μ auch regulär.

4 Sei μ ein Maß und N eine μ-Nullmenge. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ auch eine Überdeckung von N durch *offene* Intervalle $I_1, I_2, ..$ so, dass

$$\sum_{k \geqslant 1} \mu(I_k) < \varepsilon.$$

▹ *Lösung* Sei also $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Überdeckung von N durch Intervalle $J_1, J_2, ..$ so, dass

$$\sum_{k \geqslant 1} \mu(J_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aufgrund der Regularität des Maßes μ existiert zu jedem J_k ein *offenes* Intervall $I_k \supset J_k$ mit

$$\mu(I_k) < \mu(J_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Diese offenen Intervalle $I_1, I_2, ..$ bilden natürlich ebenfalls eine Überdeckung von N. Außerdem gilt

$$\sum_{k \geqslant 1} \mu(I_k) < \sum_{k \geqslant 1} \mu(J_k) + \sum_{k \geqslant 1} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$ ◃