1 Eine reelle Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ interpretiere man als Funktion

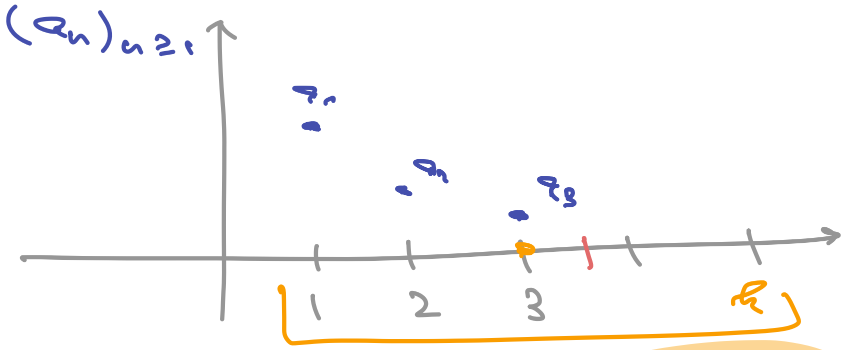
$$a:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad a(x)=\begin{cases} a_n, & x=n\in\mathbb{N},\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Sei ν das Zählmaß auf $\mathbb{N}\subset\mathbb{R}$.

a. Für nichtnegative Folgen a gilt dann $a\in\mathcal{M}^1_s(\nu)$ $\{\ a_n \geq 0$

b. Es ist $I_\nu(a)=\sum_{n\geqslant 1} a_n$.

c. Man finde eine reelle Folge $a\in\mathcal{M}^1(\cancel{\mu}\ \nu)\setminus\mathcal{M}^1_s(\cancel{\mu}\ \nu)$ mit $\sum_{n\geqslant 1} a_n<\infty$.



a. Es gilt sogar: $a \in \mathcal{L}^1(\nu)$ $\in \mathcal{T}_+$

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{\{i\}}$$

$$s_k(j) = \sum_{i=1}^{k} a_i \underbrace{\chi_{\{i\}}(j)}_{\delta_{ij}} = a_j .$$

wobei, ~~...~~ ~~...~~ $a_i \geq 0$.

$$s_k(i) \xrightarrow{k\to\infty} a_i ,$$

denn $s_k(i) = a_i$ $\forall\, k \geq i$.

b. Ist $a_n \geq 0$ wie in a: $a = a^+ - 0$. Damit

$$I_\nu(a) = \lim_{k\to\infty} \underbrace{I_\nu(s_k)}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} s_k(i)\,\nu(\{i\})$$

$$= \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot 1$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{k \geq 1} a_k .$$

Zählmaß

$$\int_{\mathbb{N}} a \, d\nu = \sum_{k \geq 1} a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a(\{k\})$$

c. Beispiel:

$$a = \left((-1)^n \frac{1}{n} \right)_{n \geq 1}$$

Also $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Klar: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ (Leibniz).

$$L := \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Zz: $a \in \mathcal{M}^1(\nu) \setminus \mathcal{M}^1_s(\nu)$:

Schreibe $a = b - c \in \mathcal{M}^+(\nu)$

mit $b_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = a^+$

$c_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = a^-$

Es gibt keine sinnvolle Darstellung:

Annahme: $a = u \wedge v$, $u, v \in 2^{T(V)}$

Beweis:

$u = a + v \geq a$

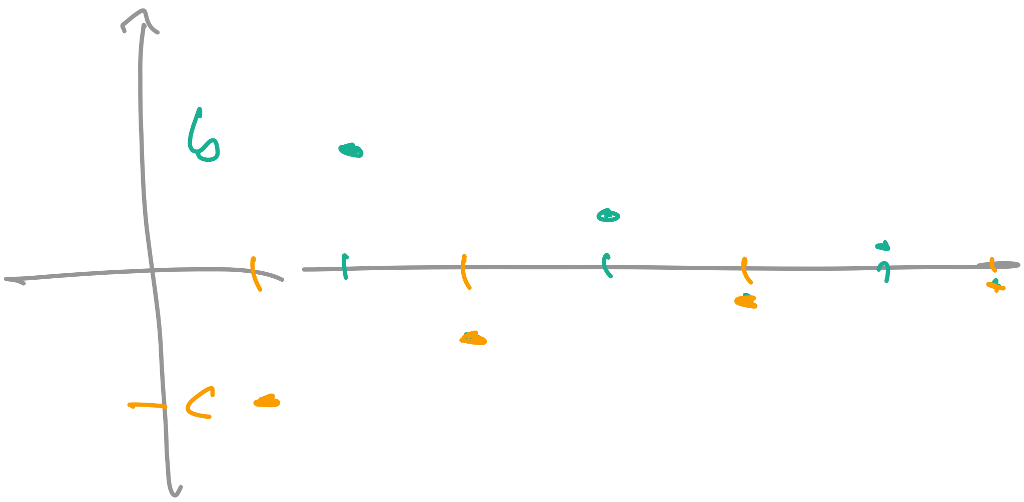
$u \geq 0$

$\Big\}$ $u \geq b$

$\Rightarrow \quad I_v(u) \geq I_v(b) = \infty.$

Analog mit v:

$I_u(v) = \infty.$



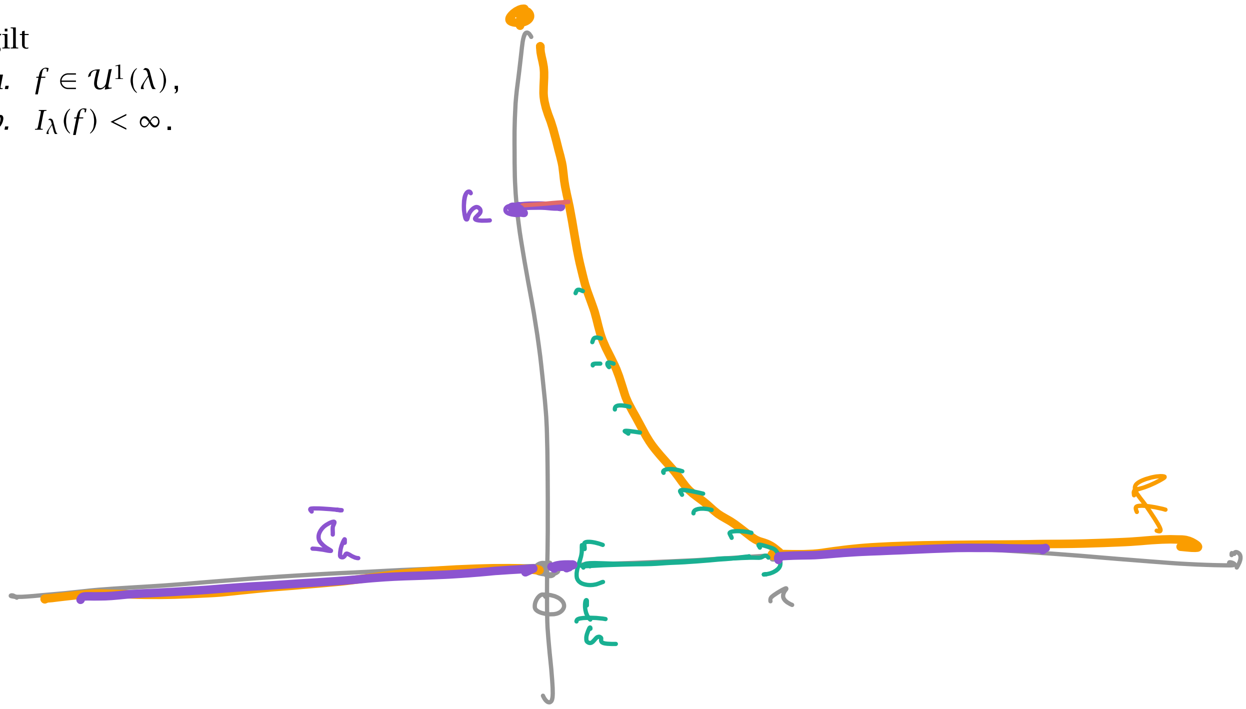
2 Für die Funktion

$$f:\ \mathbb{R}\to\bar{\mathbb{R}},\quad f(t)=\begin{cases} t^{-1/2}-1, & 0<t\leqslant 1,\\ \infty, & t=0,\\ 0, & \text{sonst},\end{cases}$$

gilt

a. $f\in\mathcal{U}^1(\lambda)$,

b. $I_\lambda(f)<\infty$.



a. $f\in\mathcal{U}^1(\lambda)$. Sei $k\geq 1$.

Auf $[\frac{1}{k},1]$ ist $\frac{1}{\sqrt{t}}-1$ stetig, also

ex. $s_k\in\mathcal{T}$: $s_k\leq f$,

$$|f-s_k|_{[\frac{1}{k},1]}<\frac{1}{k}.$$

Dann Funktion:

$$\bar{s}_k=\begin{cases} s_k & \text{auf } [\frac{1}{k},1]\\ f(\frac{1}{k}) & \text{auf } [0,\frac{1}{k}]\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Entweder Treppenfunktion :

$$f_h = \max(\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_h), \quad h \geq 1$$

$$\in T^1_+$$

Dann gilt:

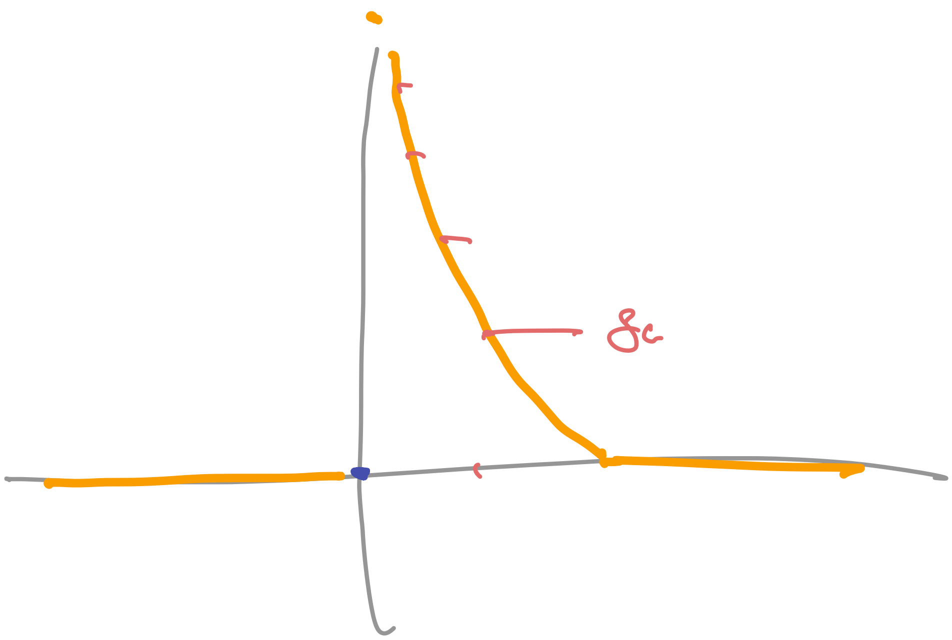
$$f_h \nearrow f \quad \text{in jedem Punkt}$$

z.B. $f_h(0) \xrightarrow[h\to\infty]{} \infty = f(0)$.

Also folgt: $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$.

Bsp. $I_\lambda(f) < \infty$. Wähle:

$$g_h = \sum_{k=1}^{h} \chi_{(2^{-k}, 2^{-k+1}]} f(2^{-k})$$



Dann gilt: g_h monoton wachsend,

$$g = \lim g_h \in \mathcal{L}^1(\lambda),$$

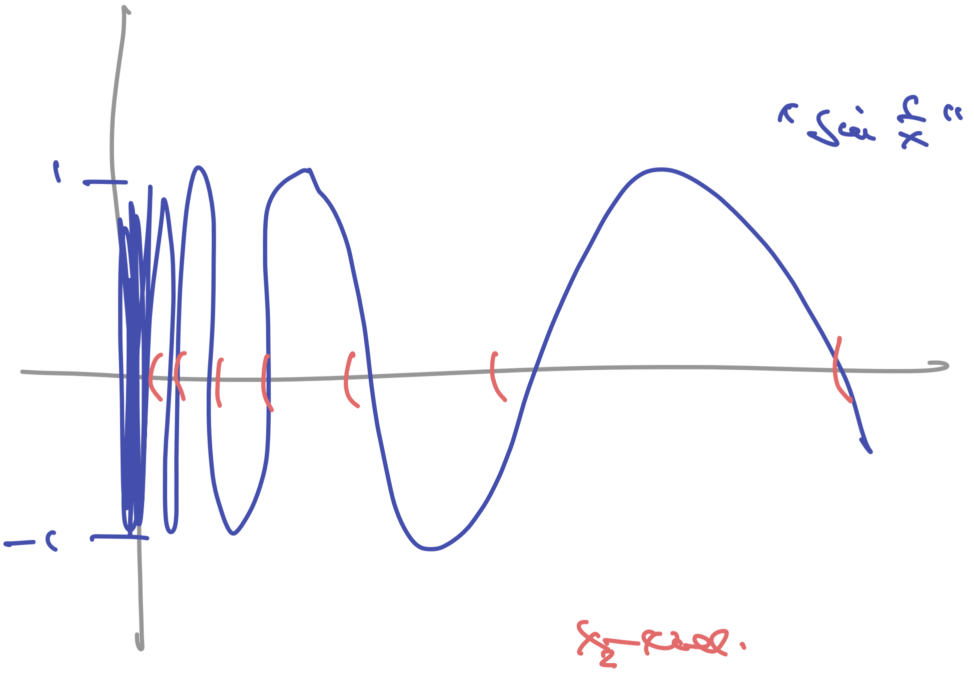
$$g \geq_\lambda f$$

$$I_k(f) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left|\left(2^{-\ell}, 2^{-\ell+1}\right]\right| \cdot f\left(2^{-\ell}\right)$$

$$= \underbrace{\sum_{\ell=k}^{\infty} 2^{-\ell} \cdot \left(2^{\ell/2} - 1\right)}_{\text{geom. Reihe}}$$

$$< \infty.$$

3 Der Graph der Funktion $x \mapsto \sin(1/x)$ für $x > 0$ ist eine λ_2-Nullmenge.



„Sei $\frac{1}{x}$"

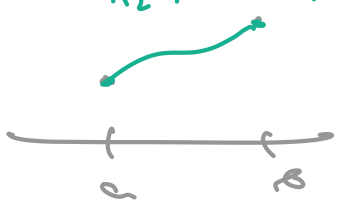
$$T = \bigcup_{n\geq 1} \text{Graph über} \underbrace{\left[\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n}\right)}$$

$$= \bigcup_{k\geq 1} \text{Graph über } [k, k+1)$$

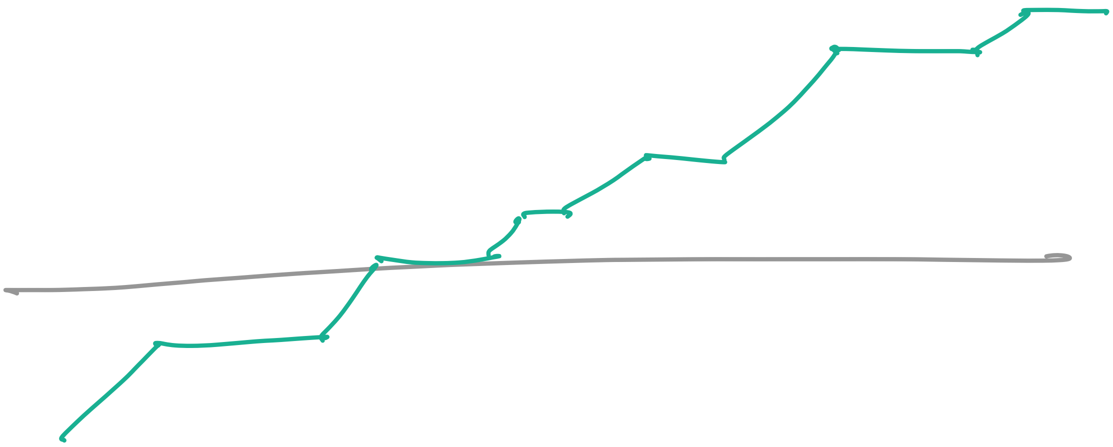
λ_2-Nullmenge

Denn diese Graph sind stetige Funktion über Kompakt ...

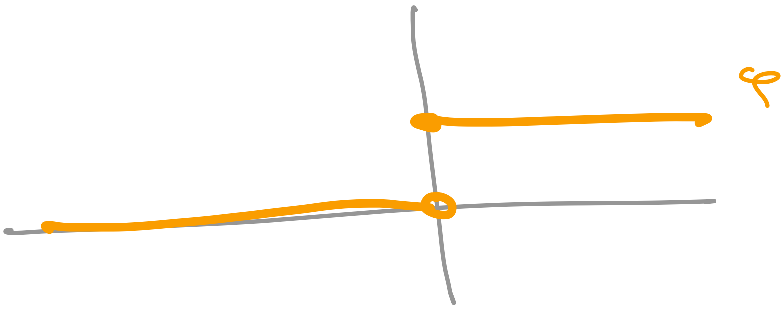
λ_2-Nullmenge.



4 Man finde eine additive und monotone, aber nicht reguläre Intervallfunktion.



Beispiel: $\varphi = \chi_{[0,\infty)}$ Heaviside



$$\mu(\langle a,b\rangle) := \varphi(b) - \varphi(a), \quad a \leq b.$$

(i) additiv: $\langle a,c\rangle$, $\langle c,b\rangle$

$$\mu(\langle a,c\rangle \cup \langle c,b\rangle) = \mu(\langle a,b\rangle) = \varphi(b) - \varphi(a)$$

$$= \mu(\langle a,c\rangle) + \mu(\langle c,b\rangle)$$

(ii) monoton: wg Monotonie von φ.

(ii) nicht regulär:

z.B. $I = [0,1]$

$$\mu(I) = \varphi(1) - \varphi(0) = 1 - 1 = 0$$

Jedes offene Intervall $J \supset I$:

$$\mu(J) = \underbrace{\varphi(1+\varepsilon)}_{1} - \underbrace{\varphi(0-\delta)}_{0} = 1 - 0 = 1$$

Also μ nicht regulär. ⊠

5 *Integral für komplexwertige Funktionen* Für eine komplexwertige Funktion $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definiert man

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \Re f \,\mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int_{\mathbb{R}^n} \Im f \,\mathrm{d}\mu.$$

a. Es ist f integrierbar genau dann, wenn $\Re f$ und $\Im f$ integrierbar sind.
b. Es ist f integrierbar genau dann, wenn $|f|$ integrierbar ist.
c. Es gilt

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\mu \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

Hinweis: Wähle $\alpha > 0$ so, dass $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \int f \,\mathrm{d}\mu > 0$.

▹ *Lösung* *a.* Damit die rechte Seite eine komplexe Zahl darstellt, müssen Real- und Imaginärteil von f summierbar sein.
b. Wähle $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ so, dass

$$\left| \int f \right| = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \int f > 0. \tag{‡}$$

Mit $f = u + \mathrm{i}v$ erhalten wir dann

$$\left| \int f \right| = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} f = \int (u\cos\alpha - v\sin\alpha) + \mathrm{i} \int (v\cos\alpha + u\sin\alpha).$$

Das zweite Integral muss wegen (‡) aber verschwinden, weshalb mit der Schwarzschen Ungleichung

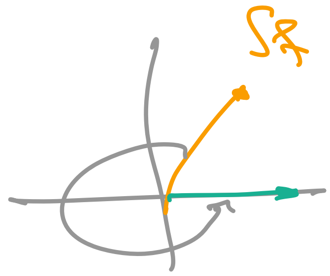
$$\begin{aligned} \left| \int f \right| &\leqslant \int |u\cos\alpha| + |v\sin\alpha| \\ &\leqslant \int \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}\,\sqrt{u^2+v^2} = \int |f|. \end{aligned}$$

Dreiecksungleichung: f komplex:

$f = u + iv$

Dann ex. α:

$$e^{i\alpha} \cdot \int f \in [0, \infty)$$



Dann gilt:

$$\left| \int f \right|$$

$$= e^{i\alpha} \int f$$

$$= \int e^{i\alpha} f$$

$$= \int (\cos\alpha + i \sin\alpha)(u + iv)$$

$$= \int (u \cos\alpha - v \cdot \sin\alpha) + i \underbrace{\int \dots}_{=0}$$

$$\leq \int |u \cos\alpha| + |v \sin\alpha|$$

$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \int \underbrace{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}}_{1} \cdot \sqrt{u^2+v^2}$$

$\langle (u,v), (\cos, \sin) \rangle$

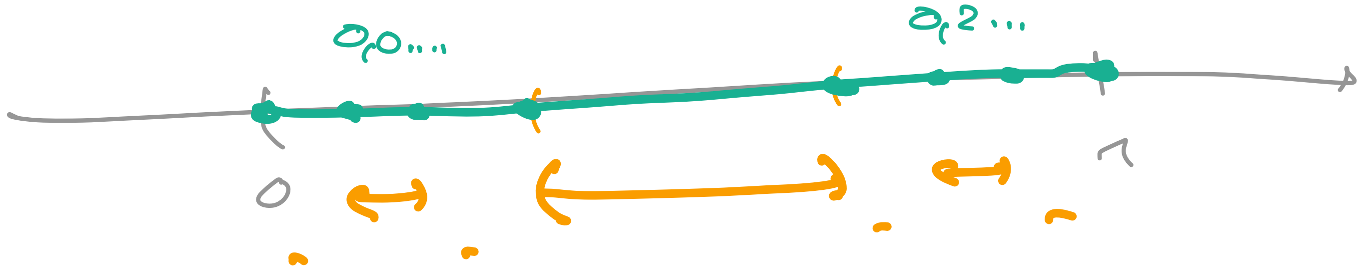
$$= \int \sqrt{u^2+v^2} = \int |f|.$$

∎

Cantormenge :

1) Cantormenge in $\mathbb{R}$:

- abgeschlossen
- perfekt
- nirgends dicht



$\longrightarrow C \subset [0,1]$

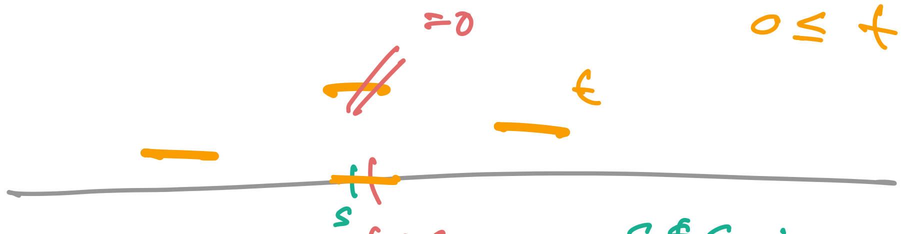
- C abgeschlossen, denn Komplement offen.
- $\lambda(C) = 0$
- nirgends dicht :
- überabzählbar :
- C besteht aus Punkten $x =$

$$\sum \frac{a_n}{3^n}, \quad a_n \in \{0,2\}.$$

Allgemein: Ist C konvex,

dann $\tau_C \notin T_t^*$.

$$0 \le t \le \tau_C$$



$t \in C$ $\quad$ $s \notin C$:

$$0 \le f(s) \le \tau_C(s) = 0$$

$$\longrightarrow \quad f(s) = 0$$

Die zweite Dreiecksungleichung für $T_t^* \le \tau_C$

ist nicht erfüllt.

Also: $\tau_C \notin \mathcal{U}^*(\lambda)$.