1 Eine reelle Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ interpretiere man als Funktion

$$a\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad a(x)=\begin{cases} a_n, & x=n\in\mathbb{N},\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Sei ν das Zählmaß auf $\mathbb{N}\subset\mathbb{R}$.

a. Für nichtnegative Folgen a gilt dann $a\in\mathcal{M}_s^1(\nu)$

b. Es ist $I_\nu(a)=\sum_{n\geqslant 1}a_n$.

c. Man finde eine reelle Folge $a\in\mathcal{M}^1(\mu)\setminus\mathcal{M}_s^1(\mu)$ mit $\sum_{n\geqslant 1}a_n<\infty$.

2 Für die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R}\to\bar{\mathbb{R}},\quad f(t)=\begin{cases} t^{-1/2}-1, & 0<t\leqslant 1,\\ \infty, & t=0,\\ 0, & \text{sonst,}\end{cases}$$

gilt

a. $f\in\mathcal{U}^1(\lambda)$,

b. $I_\lambda(f)<\infty$.

3 Der Graph der Funktion $x\mapsto\sin(1/x)$ für $x>0$ ist eine λ_2-Nullmenge.

4 Man finde eine additive und monotone, aber nicht reguläre Intervallfunktion.

5 *Integral für komplexwertige Funktionen* Für eine komplexwertige Funktion $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ definiert man

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}\mu=\int_{\mathbb{R}^n}\Re f\,\mathrm{d}\mu+\mathrm{i}\int_{\mathbb{R}^n}\Im f\,\mathrm{d}\mu.$$

a. Es ist f integrierbar genau dann, wenn $\Re f$ und $\Im f$ integrierbar sind.

b. Es ist f integrierbar genau dann, wenn $|f|$ integrierbar ist.

c. Es gilt

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}\mu\right|\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}|f|\,\mathrm{d}\mu.$$

Hinweis: Wähle $\alpha>0$ so, dass $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\int f\,\mathrm{d}\mu>0$.