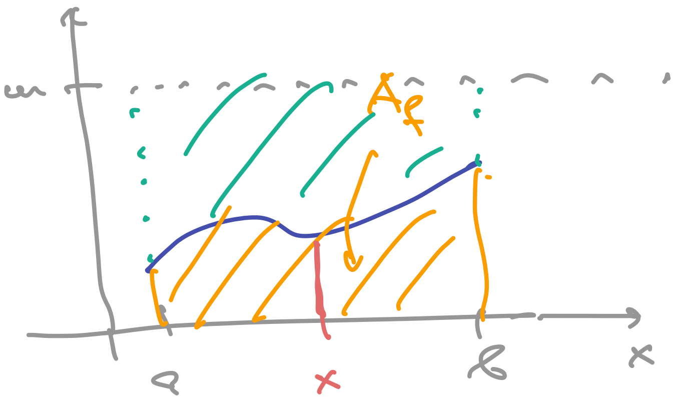
1 Sei $f\colon [a,b] \to [0,\infty)$ stetig und

$$A_f = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

die Fläche unter dem Graphen von f. Dann ist A_f messbar und

$$\lambda(A_f) = \int_a^b f.$$



1. A_f ist abgeschlossen $\Rightarrow$ λ-messbar.

2. $$\lambda(A_f) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{A_f} \, d\lambda_2$$

integrierbar

$$= \int_{[a,b]\times[0,m]} \chi_{A_f} \, d\lambda$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{[a,b]} \Big\{ \underbrace{\int_0^m \chi_{A_f}(x,y)\, dy}_{f(x)} \Big\} dx$$

$$= \int_{[a,b]} f(x) \, dx$$

$$= \int_a^b f .$$

2 Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit kompakten Träger, so ist

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

wohldefiniert, differenzierbar, und es gilt

$$F'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Bew: 1. $f(x,\cdot)$ ist stetig, kompakt Träger für jedes $x \in \mathbb{R}$, also integrierbar.

2. Parameter Abhängig: f_x ist stetig, kompakt Träger.

Also: $|f_x(x,\cdot)| \leq \underbrace{M \chi_{[-M,M]}}_{\text{integrierbar}}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Satz zur Diff. nach Parameter anwenden:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\cdot)\,dy$$

ist differenzierbar, und

$$F'(x) = \partial_x \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\cdot)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x f(x,\cdot)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x,\cdot)\,dy.$$

3 Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) \triangleq \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}. \quad = \begin{cases} \dots, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

a.

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{2}.$$

b.

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

c.

$$\int_{[0,1]^2} |f|\,\mathrm{d}\lambda = \infty.$$

d. Ist $f\chi_{[0,1]^2}$ integrierbar?

a. $$= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx \right\} dy$$

Stammfunktion:

$$\partial_x \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(\ )^2} = \frac{y^2-x^2}{(\ )^2}$$

$$= -\int_0^1 \left\{ \frac{x}{x^2+y^2} \Big|_0^1 \right\} dy$$

$$= -\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy$$

$$= -\arctan y \Big|_0^1 = -\frac{\pi}{2}.$$

b. Antwort ... aus mit Vertauschung der Gw:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)} \,dy\,dx$$

$$\underset{x \mapsto y}{=} \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(\quad)^2} \,dx\,dy$$

$$= -\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(\quad)^2} \,dx\,dy$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

c. $\int_{[0,1]^2} |f| \,dx$

$$\underset{\text{Tonelli}}{=} \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \frac{|x^2-y^2|}{(\quad)^2}}_{\underbrace{\int_0^y}_{\text{ignorieren}} + \int_y^1} \,dx\,dy$$

$$\geq \int_0^1 \left\{ \int_y^1 \underbrace{\frac{x^2-y^2}{(\quad)^2}}_{\text{Stammf.}} \,dx \right\} dy$$

$$= -\int_0^1 \left\{ \frac{x}{x^2+y^2} \Big|_y^1 \right\} dy$$

$$= \int_0^1 \left\{ \underbrace{\frac{1}{2y}}_{\infty} - \underbrace{\frac{1}{1+y^2}}_{\text{endlich}} \right\} dy$$

$$= \infty .$$

2. Daraus folgt: f ist nicht integrierbar:

Wäre $f \in \mathcal{L}^1(I)$, dann würde Fubini gelten: Widerspruch zu a.) und b.).