1 Sei $f: [a,b] \to [0,\infty)$ stetig und

$$A_f = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

die Fläche unter dem Graphen von f. Dann ist A_f messbar und

$$\lambda(A_f) = \int_a^b f.$$

2 Ist $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit kompakten Träger, so ist

$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

wohldefiniert, differenzierbar, und es gilt

$$F'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

3 Betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) \mathrel{\hat{=}} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

a.

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{2}.$$

b.

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

c.

$$\int_{[0,1]^2} |f|\,\mathrm{d}\lambda = \infty.$$

d. Ist $f\chi_{[0,1]^2}$ integrierbar?

1 Sei $f\colon [a,b] \to [0,\infty)$ stetig und

$$A_f = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

die Fläche unter dem Graphen von f. Dann ist A_f messbar und

$$\lambda(A_f) = \int_a^b f.$$

▹ *Lösung* A_f ist abgeschlossen, also messbar. Mit Fubini erhält man mit $m = \sup_{[a,b]} f$ dann

$$\begin{aligned}\lambda(A_f) &= \int_{[a,b]\times[0,m]} \chi_{A_f}\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{[a,b]} \left(\int_{[0,m]} \chi_{A_f}(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f.\end{aligned}$$

2 Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit kompakten Träger, so ist

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

wohldefiniert, differenzierbar, und es gilt

$$F'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

▹ *Lösung* Jede partielle Funktion $f(x,\cdot)$ ist integrierbar, da sie stetig mit kompakten Träger ist. Die partielle Ableitung f_x ist ebenfalls stetig mit kompakten Träger, daher auch beschränkt. Es gilt also

$$|f_x(x,\cdot)| \leqslant M\chi_{[-M,M]}$$

mit einem hinreichend großen M für alle $x \in \mathbb{R}$, und die rechts stehende Funktion ist integrierbar. Daher ist F differenzierbar, und wir erhalten die Ableitung durch Differenziation unter dem Integral:

$$F'(x) = \partial_x \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x f)x,y)\,\mathrm{d}y. \quad ◃$$

3 Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) \mathrel{\hat=} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

a.

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{2}.$$

b.

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

c.

$$\int_{[0,1]^2} |f|\,\mathrm{d}\lambda = \infty.$$

d. Ist $f\chi_{[0,1]^2}$ integrierbar?

▹ *Lösung* *a.* Es ist ja

$$\partial_x \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= -\int_0^1 \left\{ \frac{x}{x^2+y^2} \Big|_0^1 \right\} \mathrm{d}y \\ &= -\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = -\arctan(y) \Big|_0^1 = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

b. Das folgt analog, oder mit Vertauschen der Variablen:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= -\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

c. Mit Tonelli gilt

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^2} |f|\,\mathrm{d}\lambda &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\geqslant \int_0^1 \int_y^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= -\int_0^1 \left\{ \frac{x}{x^2+y^2} \Big|_y^1 \right\} \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2y} - \frac{1}{1+y^2} \right\} \mathrm{d}y = \infty. \end{aligned}$$

d. f ist nicht integrierbar. Denn wäre f integrierbar, so würde auch der Satz von Fubini gelten, was aber offensichtlich nicht möglich ist. ◃