1 Seien $\varphi, \psi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zwei Diffeomorphismen mit positiver Jacobideterminante. Man zeige

$$\det D(\varphi \circ \psi) = (\det D\psi \circ \varphi)(\det D\varphi)$$

a. mithilfe der Kettenregel,
b. mithilfe der Transformationsformel.

a. $D(\psi \circ \varphi) = \underbrace{D\psi \circ \varphi \cdot D\varphi}$

$\Longrightarrow \det D(\psi \circ \varphi) = \det(\qquad)$

$= \det(D\psi \circ \varphi) \cdot \det D\varphi.$

b. Mit Trafo: $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx \underset{\circ\psi}{=} \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \psi) \det D\psi \, dx$$

$$\underset{\circ\varphi}{=} \int_{\mathbb{R}^n} ((f \circ \psi) \circ \varphi)(\det D\psi) \circ \varphi \cdot \det D\varphi \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \psi \circ \varphi) \det D\psi \circ \varphi \cdot \det D\varphi \, dx$$

$$\underset{\circ(\psi\circ\varphi)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f \circ (\psi \circ \varphi) \cdot \det D(\psi \circ \varphi) \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \psi \circ \varphi) \det D(\psi \circ \varphi) \, dx$$

gilt für alle $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$.

$\Longrightarrow \det D\psi \circ \varphi \cdot \det D\varphi = \det D(\psi \circ \varphi).$

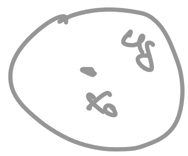
Dirac Lemma: Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig.

Ist $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f u \, dx = 0 \; , \; f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$

dann $u \equiv 0$.

Bew.: Falls nicht: $u(x_0) \overset{>}{\neq} 0$ obdA für ein x_0

$\Rightarrow \quad |u(x) - u(x_0)| < \dfrac{u(x_0)}{2} \; , \quad x \in U_\delta(x_0)$



Wähle $f = \chi_{U_\delta}$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f u \, dx = \int_{U_\delta(x_0)} u > 0 \; . \; ↯$$

2 *a.* Bezeichnet $\rho = \operatorname{diag}(-1, 1.., 1)$ die Reflexion in der ersten Koordinate, so gilt

$$\int_{\Omega} g \, \mathrm{d}\lambda = -\int_{\rho(\Omega)} g \circ \rho \, \mathrm{d}\lambda$$

für jede auf einem Gebiet Ω integrierbare Funktion g.
b. Gilt $\det D\varphi < 0$ auf Ω, so folgt

$$\int_{\Omega} (f \circ \varphi) \, |\det D\varphi| \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\rho(\Omega)} (f \circ \varphi \circ \rho) \det D(\varphi \circ \rho) \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\varphi(\Omega)} f \, \mathrm{d}\lambda$$

mit der bereits bewiesenen Transformationsformel für positive Determinanten.

a. Satz Fubini: $g = g(t, \hat{x})$, $(t, \hat{x}) = x \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\Omega} g \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} g_{\Omega}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} g_{\Omega}(t, \hat{x}) \, dt \, d\hat{x}$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} g_{\Omega}(-t, \hat{x}) \, dt \, d\hat{x}$$

$$= -\int_{\rho(\Omega)} g \circ \rho \, d\lambda .$$

b. $$\int_{\Omega} (f \circ \varphi) \, |\det D\varphi| \, d\lambda$$

$$\underset{a)}{=} -\int_{\rho(\Omega)} (f \circ \varphi \circ \rho) \, \underbrace{|\det D\varphi|}_{\det D(\varphi \circ \rho)} \, d\lambda$$

$$= \int_{\rho(\Omega)} (f \circ \varphi \circ \rho) \det D(\varphi \circ \rho) \, d\lambda$$

$$\underset{\text{Trafo} > 0}{=} \int_{(\varphi \circ \rho)(\rho(\Omega)) = \varphi(\Omega)} f \, d\lambda .$$

3 *a.* Man verifiziere $\partial_1 M_1 + .. + \partial_n M_n \equiv 0$ direkt für $n = 2$ und $n = 3$.
b. Mit den Bezeichnungen des Beweises der lokalen Transformationsformel ?? und der üblichen Produktregel gilt

$$\partial_1 M_1 + .. + \partial_n M_n = \boxed{\det(\nabla, \nabla\varphi_2, .., \nabla\varphi_n) = \sum_{k=2}^{n} \det_k(\nabla, \nabla\varphi_2, .., \nabla\varphi_n),}$$

wobei $\det_k$ bedeutet, dass die Elemente von ∇ nur auf die Elemente der k-ten Spalte anzuwenden ist.
c. Man zeige. dass jede dieser $\det_k$-Determinanten verschwindet.

$$\det\begin{pmatrix} \partial_1 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \nabla\varphi_2 & \cdots & \nabla\varphi_n \\ \partial_n & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \leftarrow k$$

$$\underset{\text{1. Spalte}}{=} \sum_{k=1}^{n} \partial_k \cdot M_k \overset{!}{=} 0.$$

a. $n=2$:

$$D\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{1,1} & \varphi_{2,1} & \varphi_{3,1} \\ \varphi_{1,2} & \varphi_{2,2} & \varphi_{3,2} \\ \varphi_{1,3} & \varphi_{2,3} & \varphi_{3,3} \end{pmatrix} \quad n=3$$

$$\partial_1 M_1 + \partial_2 M_2 =$$

$$= \partial_1 \varphi_{2,2} - \partial_2 \varphi_{2,1}$$

$$= \varphi_{2,21} - \varphi_{2,12} \underset{\text{Schwarz}}{=} 0.$$

$n=3$:

$$\partial_1 (\varphi_{2,2}\varphi_{3,3} - \varphi_{2,3}\varphi_{3,2})$$

$$- \partial_2 (\varphi_{2,1}\varphi_{3,3} - \varphi_{2,3}\varphi_{3,1})$$

$$+ \partial_3 (\varphi_{2,1}\varphi_{3,2} - \varphi_{2,2}\varphi_{3,1}) = \ldots = 0.$$

b. Allgemein Fall:

$$\det(\nabla, \nabla\varphi_2, \ldots, \nabla\varphi_n)$$

Def. Formel

$$= \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} \underbrace{\partial_{\sigma_1}\left((\nabla\varphi_2)_{\sigma_2} \cdots (\nabla\varphi_n)_{\sigma_n}\right)}_{\text{Produktregel}}$$

$$= \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} \cdot \sum_{k=2}^{n} (\nabla\varphi_2)_{\sigma_2} \cdots \partial_{\sigma_1}(\nabla\varphi_k)_{\sigma_k} \cdots (\nabla\varphi_n)_{\sigma_n}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}$$

wie auf R.S. Def. d

$$= \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} \partial^{(k)}_{\sigma_1}\left((\nabla\varphi_2)_{\sigma_2} \cdots (\nabla\varphi_n)_{\sigma_n}\right)}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\det_k(\nabla, \nabla\varphi_2, \ldots, \nabla\varphi_n)}.$$

Jede $\det_k = 0$.

c. OE $k=2$

$$\det_2(\nabla, \nabla\varphi_2, \ldots, \nabla\varphi_n)$$

$$\det_k(\;) = \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} \underbrace{\partial_{\sigma_1}(\nabla\varphi_2)_{\sigma_2}} \cdots (\nabla\varphi_n)_{\sigma_n}$$

$$= \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} \underbrace{\partial_{\sigma_1}\partial_{\sigma_2}\varphi_2}_{\text{ist 2mal}} (\;) \cdots (\;)$$

mit [illegible] [illegible] [illegible].

$$= 0.$$

☒

4 Es gibt keine surjektive stetig differenzierbare Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^2$

Beweis: Satz Sard:

Gegeben: $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$

sei C^1.

Ergänze:

$$\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi(t,s) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

Dann ψ auch C^1,

$$D\psi = \begin{pmatrix} u' & 0 \\ v' & 0 \end{pmatrix}$$ singulär bei allen $t \in \mathbb{R}$.

Also: jeder Punkt in $\mathbb{R}^2$ ist krit. Punkt von ψ.

Sard: $\psi(\mathbb{R}^2)$ ist λ-Nullmenge.

$$\parallel$$

$$\varphi(\mathbb{R}).$$

Bem: Peanokurve:

$\gamma : [0,1] \longrightarrow [0,1]^2$ stetig, surjektiv.

$\gamma([0,1]) = [0,1]^2$

keine λ_2-Nullmenge,

nicht C^1.