1 Seien $\varphi, \psi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zwei Diffeomorphismen mit positiver Jacobideterminante. Man zeige

$$\det D(\varphi \circ \psi) = (\det D\psi \circ \varphi)(\det D\varphi)$$

a. mithilfe der Kettenregel,
b. mithilfe der Transformationsformel.

2 *a.* Bezeichnet $\rho = \operatorname{diag}(-1, 1.., 1)$ die Reflexion in der ersten Koordinate, so gilt

$$\int_\Omega g \,\mathrm{d}\lambda = -\int_{\rho(\Omega)} g \circ \rho \,\mathrm{d}\lambda$$

für jede auf einem Gebiet Ω integrierbare Funktion g.
b. Gilt $\det D\varphi < 0$ auf Ω, so folgt

$$\int_\Omega (f \circ \varphi)\,|\det D\varphi| \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\rho(\Omega)} (f \circ \varphi \circ \rho) \det D(\varphi \circ \rho) \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\varphi(\Omega)} f \,\mathrm{d}\lambda$$

mit der bereits bewiesenen Transformationsformel für positive Determinanten.

3 *a.* Man verifiziere $\partial_1 M_1 + .. + \partial_n M_n \equiv 0$ direkt für $n = 2$ und $n = 3$.
b. Mit den Bezeichnungen des Beweises der lokalen Transformationsformel ?? und der üblichen Produktregel gilt

$$\partial_1 M_1 + .. + \partial_n M_n = \det(\nabla, \nabla\varphi_2, .., \nabla\varphi_n) = \sum_{k=2}^{n} \det_k(\nabla, \nabla\varphi_2, .., \nabla\varphi_n),$$

wobei $\det_k$ bedeutet, dass die Elemente von ∇ nur auf die Elemente der k-ten Spalte anzuwenden ist.
c. Man zeige. dass jede dieser $\det_k$-Determinanten verschwindet.

4 Es gibt keine surjektive stetig differenzierbare Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^2$