1 Für eine C^1-Kurve $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ und eine 1-Form $\alpha = u\,dx + v\,dy$ auf $\mathbb{R}^2$ bestimme man $\gamma^*\alpha$.

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$\alpha = u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy$$

Dann:

$$\gamma^*\alpha = u(\gamma(t))\,\underbrace{\gamma^* dx}_{\substack{d(x(t)) \\ = \dot x(t)\,dt}} + v(\gamma(t))\,\underbrace{\gamma^* dy}_{\substack{d(y(t)) \\ = \dot y(t)\,dt}}$$

$$= \big(u(\gamma(t))\,\dot x(t) + v(\gamma(t)) \cdot \dot y(t) \big)\,dt$$

Also:

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \quad .$$

Schritt:

$$\gamma^* dx = d(\,x\text{-Komponente von } \gamma\,) = d(\,x(t)) = \dot x(t)\,dt\ .$$

Siehe Skript: ___

2 Die Form

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y - \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x$$

„Windungsform“

auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist geschlossen, aber nicht exakt.

Geschlossen: $d\omega \overset{!}{=} 0$.

$$\partial_x\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(\ \ )^2} = \frac{y^2-x^2}{(\ \ )^2}$$

$$\partial_y\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(\ \ )^2}$$

Also:

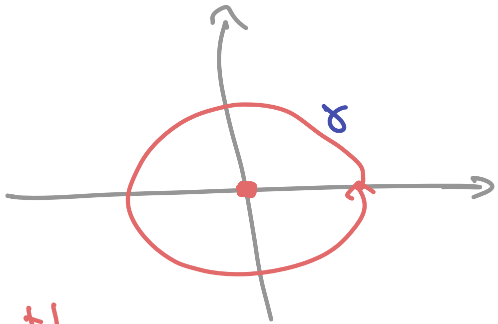
$$d\omega = \partial_x(\ \ )\,dx \wedge dy \overset{+}{-} \partial_y(\ \ )\,dy\wedge dx$$

$$= \left(\partial_x\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \underbrace{\partial_y\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)}_{= -\,\cdots}\right) dx\wedge dy$$

$$= 0.$$

Also ω geschlossen.

Also ω nicht exakt:



$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$,
$0 \le t \le 2\pi$:

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \gamma^*\omega$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{\sin^2 + \cos^2}\, d(\sin t) - \frac{\sin t}{\sin^2 + \cos^2}\, d(\cos t)$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt + \sin^2 t \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1})\, dt$$

$$= 2\pi$$

$$\neq 0$$

$\Rightarrow$ ω ist nicht exakt.

3 Sei $\varphi\colon [0,1]^n \to [0,1]^n$ eine stetig differenzierbare Bijektion mit $\det D\varphi \geqslant 0$ überall. Für jeden n-Würfel c und jede n-Form ω gilt dann

$$\int_c \omega = \int_{c\circ\varphi} \omega.$$

$$c : [0,1]^n = I^n \longrightarrow \mathbb{R}^{\ldots}$$

Beweis:

$$\int_{c\circ\varphi} \omega = \int_{I^n} (c\circ\varphi)^* \omega$$

$$= \int_{I^n} \varphi^* \underbrace{(c^* \omega)}_{=:\,\eta}$$

$$\eta := c^* \omega :$$

$$\varphi^* \eta = \eta\circ\varphi \cdot \det D\varphi \; dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

$$= \eta\circ\varphi \cdot |\det D\varphi| \ldots$$

Transformationsformel: $\varphi(I^n) = I^n$:

$$\int_{c\circ\varphi} \omega = \int_{I^n} (c\circ\varphi)^* \omega$$

$$= \int_{I^n} \varphi^* \eta$$

$$= \int_{I^n} (\eta\circ\varphi) \cdot \overbrace{|\det D\varphi|}^{\geq 0}$$

$$\overset{\text{Trafo}}{=} \int_{\underbrace{\varphi(I^n)}_{= I^n}} \eta$$

$$= \int_{I^i} c^* \omega$$

$$= \int_c \omega \quad . \qquad \boxtimes$$

4 *a.* Zeigen sie, dass es zu jeder n-Form $\omega \neq 0$ eine n-Kette c gibt, so dass

$$\int_c \omega \neq 0.$$

b. Benutzen sie dies, den Satz von Stokes und $\partial^2 = 0$, um $\mathrm{d}^2 = 0$ zu zeigen.

a. $\omega \neq 0$ Sonst: $\exists$ gibt $p \in \mathbb{R}^{\text{offen}}$

und Vektoren $v_1, \ldots, v_n$:

$$\omega(p)(\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}) > 0.$$

Da ω stetig, gibt es sogar eine

Umgebung $C \subset \mathbb{R}^{\text{offen}}$ auf

$$\omega(q)(v_1, \ldots, v_n) > 0, \quad q \in C.$$

Setze Würfel:

$$c : I^n \longrightarrow \mathbb{R}^{\text{offen}}$$

$$c(x) = p + \varepsilon A x :$$

wobei $A : e_j \longmapsto \underline{v_j}$

[illegible] $\varepsilon > 0$ s.t. [illegible], [illegible]

$$c(B^n) \subset U.$$

[illegible]: $$\int_c \omega$$

$$= \int_{B^n} c^* \omega$$

$$= \int_{B^n} \underbrace{\sum \omega(\underbrace{c(x)}_{\in U})(v_1, \dots, v_n)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n}_{>0}$$

$$> 0.$$

6. Suppose, $\partial^2 c = 0$.

$$\int_c d^2\omega = \int_{\partial c} d\omega$$

$$= \int_{\underbrace{\partial^2 c}_{=0}} \omega = 0,$$

[illegible] [illegible] c : $\Rightarrow$ $d^2\omega = 0$.

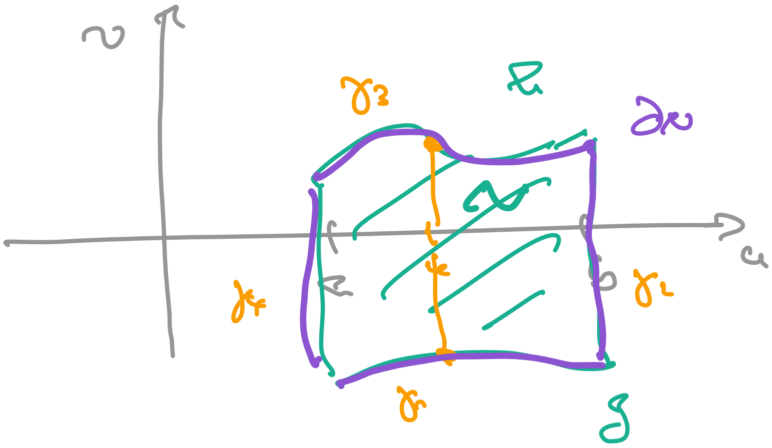
5 Seien $g,h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g \leqslant h$ und

$$N = \{(u,v) : a \leqslant u \leqslant b \,\wedge\, g(u) \leqslant v \leqslant h(u)\}.$$

Für eine C^1-Funktion $f\colon N \to \mathbb{R}$ verifiziere man auf elementare Weise, dass

$$\int_N f_v \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = -\int_{\partial N} f \,\mathrm{d}u.$$

N ist Normalbereich in $\mathbb{R}^2$:



$$\int_N f_v \,du\,dv \underset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b \left(\int_{g(u)}^{h(u)} f_v(u,v)\,dv \right) du$$

$$= \int_a^b \left(f(u,\cdot)\Big|_{g(u)}^{h(u)} \right) du$$

$$= \int_a^b f(u,h(u))\,du - \int_a^b f(u,g(u))\,du$$

$$\left[\begin{array}{l} \gamma_3(t) = (t, \tilde{x}(t)), \quad a \le t \le b: \\ \displaystyle\int_{\gamma_3} f = \int f(t, x(t))\, dt \\ \qquad\qquad\qquad (= du) \end{array}\right]$$

$$= \int_{\gamma_3} f - \int_{\gamma_1} f$$

$\gamma_1(t) = (t, g(t))$

Außerdem: $\displaystyle\int_{\gamma_2} f\,du = \int_{\gamma_4} f\,du = 0$:

$\gamma_2(t) = (b, t)$, $\quad g(b) \le t \le \tilde{x}(b)$

$\gamma_4(t) = \dots$

denn $du = 0$.

$$= \int_{\gamma_3 - \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_4} f\,du \qquad \square$$

$$= \int_{-\partial N} f\,du.$$