Votieraufgaben

1 Sei E ein komplexer Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Dann definiert

$$[x, y] \coloneqq \Re \langle x, y \rangle$$

ein Skalarprodukt auf E aufgefasst als Hilbertraum über $\mathbb{R}$.

2 Sei A eine hermitesche $n \times n$-Matrix. Dann definiert

$$\langle x, y \rangle_A \coloneqq \langle Ax, y \rangle$$

ein inneres Produkt auf $\mathbb{C}^n$ genau dann, wenn $\sigma(A) > 0$.

3 Sei Λ eine *beliebige* Indexmenge und $\mathcal{P}_0(\Lambda)$ die Menge aller *endlichen* Teilmengen von Λ. Eine Familie $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ von Elementen eines komplexen Hilbertraums heißt *summierbar* und

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$$

ihre *Summe*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\Lambda_0 \in \mathcal{P}_0(\Lambda)$ gibt, so dass

$$\left\| x - \sum_{\lambda \in L} x_\lambda \right\| < \varepsilon, \qquad L \in \mathcal{P}_0(\Lambda) \wedge \Lambda_0 \subset L.$$

a. Gilt $x = \sum_\lambda x_\lambda$ und $y = \sum_\lambda y_\lambda$, so gilt auch

$$x + y = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x_\lambda + y_\lambda).$$

b. Gilt $x = \sum_\lambda x_\lambda$, so gilt auch

$$\langle x, y \rangle = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle x_\lambda, y \rangle .$$

c. *Cauchy-Kriterium:* (x_λ) ist summierbar genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\Lambda_0 \in \mathcal{P}_0(\Lambda)$ gibt, so dass

$$\left\| \sum_{\lambda \in K} x_\lambda \right\| < \varepsilon, \qquad K \in \mathcal{P}_0(\Lambda) \wedge K \cap \Lambda_0 = \varnothing.$$

d. Ist (x_λ) summierbar, so ist die Menge $\{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \neq 0\}$ abzählbar.

Votieraufgaben

4 Welche der folgenden Unterräume von $L^2(\mathbb{R})$ sind abgeschlossen?

a. $E = \{f : f(-t) = f(t) \text{ für fast alle } t \in \mathbb{R}\}$.

b. $F = \{f : f|_A =_\mu 0\}$ mit $A \subset \mathbb{R}$ messbar.

c. $L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

5 Ein Unterraum M in E ist abgeschlossen genau dann, wenn $M^{\perp\perp} = M$.

6 Bestimmen sie

$$\min_{a,b,c} \int_0^\infty |x^3 - ax^2 - bx - c|^2 \, \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x,$$

indem sie das Problem ›hilbertraummäßig‹ interpretieren.

Schriftaufgaben

7 Sei (a_n) eine Folge positiver reeller Zahlen mit der Eigenschaft, dass $\sum a_n b_n < \infty$ für jede Folge (b_n) positiver reeller Zahlen mit $\sum b_n^2 < \infty$. Dann gilt $\sum a_n^2 < \infty$.

8 Sei K eine nichtleere, konvexe und kompakte Menge in E. Dann ist die Abbildung $P : E \to M$, die $x \in E$ auf das eindeutig bestimmte bestapproxierende Element $P(x) \in M$ abbildet, stetig.

Zusatzaufgabe

9 Für eine stetige lineare Abbildung $P : E \to E$ eines normierten Vektorraums E sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) P is *idempotent*: $P^2 = P$.

(ii) Es ist $E = \operatorname{ran} P \oplus \ker P$ und $P|\operatorname{ran} P = I$.

(iii) P ist die Projektion auf $\operatorname{ran} P$ entlang $\ker P$.

Ist E ein Hilbertraum, so ist P orthogonal genau dann, wenn außerdem gilt

(iv) P ist selbstadjungiert: $\langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle$, $x, y \in E$.

Dabei bedeuet

$$E = U \oplus V,$$

dass U und V abgeschlossene Unterräume von E sind mit $U + V = E$ und $U \cap V = \{0\}$.

Votieraufgaben

10 Man bestimme die Fourierreihen der auf $[-\pi,\pi]$ gegebenen Funktionen
a. $|t|$ *b.* $\operatorname{sgn} t$ *c.* $|\sin t|$ *d.* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

11 Sei $A \subset [-\pi,\pi]$ messbar. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \cos nt \,\mathrm{d}t = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_A \sin nt \,\mathrm{d}t = 0.$$

12 Für die Dirichletkerne

$$D_n(t) = \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}$$

zeige man

$$\|\hat{D}_n\|_\infty \equiv 1, \qquad \|D_n\|_1 \to \infty.$$

Schriftaufgabe

13 Die Funktionen *a.* $1/2$, $\cos nt$ für $n \geqslant 1$ *b.* $\sin nt$ für $n \geqslant 1$
bilden ein orthogonales und vollständiges System in $L^2([0,\pi])$.

Extraaufgabe

14 Sei (n_k) eine wachsende unbeschränkte Folge natürlicher Zahlen. Dann ist

$$X \coloneqq \{x \in [0,2\pi] : (\sin n_k x) \text{ ist konvergent}\}$$

eine Nullmenge. *Hinweis:* Zeigen sie dass für $(\sin^2 n_k x)$ nur ein Grenzwert möglich sind.

Votieraufgaben

15 Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$. Gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |\hat{f}_n|^2 < \infty,$$

so konvergiert die Fourierreihe von f absolut und gleichmäßig fast überall gegen f.

16 Bestimmen sie für $\lambda > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert

$$\lim_{r\to\infty} \int_{[-r,r]} \frac{\sin \lambda t}{t} \mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}t.$$

17 *Gliedweise Integration* Sei $f \colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Dann gilt

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_a^b \hat{f}_n \mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t$$

für jedes Intervall $[a,b] \subset \mathbb{T}$.

18 Beweisen sie mithilfe der Fourierreihe der Sprungfunktion die Identität

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Schriftaufgabe

19 Gegeben sind die Fourierreihendarstellungen

$$f \sim \sum \hat{f}_n \mathrm{e}^{int}, \qquad g \sim \sum \hat{g}_n \mathrm{e}^{int}.$$

Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t \sim \sum \hat{f}_n \hat{g}_n \mathrm{e}^{inx}.$$

Mit anderen Worten, es gilt $(f * g)\hat{} = (\hat{f}_n \hat{g}_n)_n$.

Extraaufgabe

20 *Riemannscher Lokalisierungssatz* Sei $f \in L^1(\mathbb{T})$ und $x \in \mathbb{T}$. Gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \{f(x+t) + f(x-t) - 2c\} \frac{\sin(n+1/2)t}{t}\,\mathrm{d}t = 0$$

für ein $c \in \mathbb{R}$ und ein $\delta > 0$, so konvergiert die Fourierreihe $Sf(x)$ gegen den Wert c. *Hinweis:* Man passe den Beweis des Dinischen Kriteriums entsprechend an.

Votieraufgaben

21 Man zeige, dass $C_0(\mathbb{R}^n)$ abgeschlossen in $C(\mathbb{R}^n)$ ist, naturlich brezüglich der Supremumsnorm.

22 Bestimmen sie die Fouriertransformationen der folgenden Funktionen. *Hinweis:* Manchmal hilft der Umkehrsatz.

a. $\dfrac{\sin x}{x}$ *b.* $\dfrac{1}{1+x^2}$ *c.* $\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$

23 Für $f(t) = t^{-1}\sin t$ und $g(t) = e^{2\mathrm{i}t} f(t)$ ist $f * g = 0$.

24 Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ nicht identisch Null, λ eine komplexe Zahl, und $\hat{f} = \lambda f$. Was gilt dann für λ?

25 Für jedes feste $g \in \mathcal{S}_n$ ist $f \mapsto gf$ auf $\mathcal{S}_n$ stetig.

Schriftaufgabe

26 Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ nur eine Funktion von $|x|$, so gilt dasselbe auch für $\hat{f}$.

Votieraufgaben

27 Zeigen sie die Stetigkeit der Fouriertransformation auf $\mathcal{S}_n$.

28 Finden sie eine Schwartzfunktion φ mit

$$\hat{\varphi} = \mathrm{i}\varphi.$$

Für diese Funktion gilt also $\mathcal{F}^\nu \varphi \ne \varphi$ für $\nu = 1, 2, 3$.

29 Sei $h_n = \chi_{[-n,n]}$ für $n = 1, 2, \ldots$ Bestimmen sie

$$f_n = \mathcal{F}^{-1}(h_n * h_1)$$

und zeigen sie, dass $\|f_n\|_1 \to \infty$. Folgern sie, dass $\mathcal{F}\colon L^1 \to C_0$ nicht surjektiv ist.

30 Sei $f \in \mathcal{D}_n$ nicht die Nullfunktion. Dann ist $\hat{f} \notin \mathcal{D}_n$.

31 Gegeben ist das Rand- und Anfangswertproblem

$$u_t = u_{xx} - u, \qquad (x, t) \in [0, \pi] \times [0, \infty)$$

mit

$$u = \begin{cases} 0 & \text{auf} \quad \partial\,[0, \pi] \times [0, \infty)\,, \\ \sin x + \sin 2x & \text{auf} \quad [0, \pi] \times \partial\,[0, \infty)\,. \end{cases}$$

Bestimmen sie mithilfe
a. des Ansatzes $u(x, t) = v(t) \sin \omega x$ ein gewöhnliche Differenzialgleichung für v und ihre Lösung,
b. der Randbedingungen zulässige Werte für ω,
c. von Superposition eine Lösung der Aufgabe.

Schriftaufgaben

32 Bestimmen sie für $\lambda > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert

$$\lim_{r\to\infty} \int_{[-r,r]} \frac{\sin \lambda t}{t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \,\mathrm{d}t.$$

33 Bestimmen sie mithilfe der Fouriertransformation eine Lösung des Randwertproblems

$$-u'' + u = \mathrm{e}^{-|x|}, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} u(x) = 0.$$

Votieraufgaben

34 Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Welche der folgenden Implikationen ist korrekt? Mit Beweis oder Gegenbeispiel natürlich.
a. $\varphi\Lambda = 0 \ \Rightarrow \ \Lambda\varphi = 0$.
b. $\Lambda\varphi = 0 \ \Rightarrow \ \varphi\Lambda = 0$.

35 Sei $L = P(D)$ ein linearer Differenzialoperator mit konstanten Koeffizienten. Dann gibt es dazu genau einen Differenzialoperator L^*, so dass $L\Lambda = \Lambda \circ L^*$ für alle Distributionen Λ auf $\mathbb{R}^n$.

36 Stellen sie $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ mit einer ›Knickfunktion‹ dar.

37 Sei (f_k) eine Folge in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \int_K |f_k| \,\mathrm{d}\lambda = 0, \qquad K \Subset \Omega.$$

Dann gilt $D^\alpha f_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$ für alle α.

Schriftaufgabe

38 Sei $\Omega = (0,\infty)$, und definiere

$$\Lambda\varphi = \sum_{k\geqslant 1} \varphi^{(k)}(1/k), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

a. Λ ist eine Distribution auf Ω.
b. Λ ist von unendlicher Ordnung.
c. Λ kann nicht zu einer Distribution auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden. Das heißt, es gibt kein $L \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, so dass $L = \Lambda$ auf Ω.

Votieraufgaben

39 Auf $\mathbb{R}$ ist $t \mapsto \mathrm{e}^t \cos(\mathrm{e}^t)$ eine temperierte Distribution, nicht aber $t \mapsto \mathrm{e}^t$.

40 Sei $T: \mathcal{S}_n \to C(\mathbb{R}^n)$ linear und stetig mit

$$\tau_h T = T\tau_h, \qquad h \in \mathbb{R}^n.$$

Gibt es dann eine temperierte Distribution u, so dass

$$T\varphi = u * \varphi, \qquad \varphi \in \mathcal{S}_n \ ?$$

41 Finden sie eine Fundamentallösung für $L = \partial_1\partial_2$ auf $\mathbb{R}^2$.

42 Eine Funktion $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ heißt *schwach differenzierbar* mit Ableitung $g \in L^1_{\mathrm{loc}}$, falls $(\Lambda_f)' = \Lambda_g$, was äquivalent ist mit

$$\int_{\mathbb{R}} f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda = -\int_{\mathbb{R}} g\varphi \,\mathrm{d}\lambda, \qquad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

In diesem Fall schreibt man wieder $f' = g$. Man zeige, dass die Betragsfunktion einmal schwach differenzierbar ist, aber nicht zweimal.

43 Sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ schwach differenzierbar. Dann gilt

$$(f * \varphi)' = f' * \varphi = f * \varphi', \qquad \varphi \in C_c^\infty.$$

Wegen der Scheinklausur keine Schriftaufgabe

Votieraufgaben

44 Man zeige, dass die Potenzreihen

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n, \qquad \sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$$

denselben Konvergenzradius besitzen.

45 Ist $f\colon \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}$ reell differenzierbar, so heißen

$$\delta f \coloneqq \frac{1}{2}(\partial_x f - \mathrm{i}\partial_y f), \qquad \bar{\delta} f \coloneqq \frac{1}{2}(\partial_x f + \mathrm{i}\partial_y f)$$

die *Wirtinger-Ableitungen* von f. Man zeige:

a. Wird f als Funktion von z und $\bar{z}$ geschrieben, so ist

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \bar{\delta} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}},$$

und – mit $\mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}(x - \mathrm{i}y) = \mathrm{d}x - \mathrm{i}\,\mathrm{d}y$ –

$$\delta f\,\mathrm{d}z + \bar{\delta} f\,\mathrm{d}\bar{z} = \partial_x f\,\mathrm{d}x + \partial_y f\,\mathrm{d}y.$$

b. f ist komplex differenzierbar genau dann, wenn $\bar{\delta} f = 0$.

c. Ist f zweimal reell stetig differenzierbar, so gilt

$$\Delta f = 4\delta\bar{\delta} f = 4\bar{\delta}\delta f.$$

46 Die Funktion $z \mapsto |z|^2$ ist nur im Punkt 0 komplex differenzierbar.

47 Eine auf einem Gebiet in $\mathbb{C}$ reellwertige, komplex differenzierbare Funktion ist konstant.

Schriftaufgabe

48 Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f konstant genau dann, wenn $\bar{f}$ holomorph auf Ω ist.

Votieraufgaben

49 Man berechne $\int_\gamma |z| \, \mathrm{d}z$ einmal für den oberen Halbkreis von -1 nach 1 und einmal für die gerade Strecke von -1 nach 1.

50 Sei D die offene Einheitskreisscheibe und $\varphi\colon \partial D \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist die Funktion

$$f\colon D \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \int_{\partial D} \frac{\varphi(w)}{w-z} \, \mathrm{d}w$$

wohldefiniert und holomorph.

51 Mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes zeige man, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} = \pi.$$

52 Man berechne, möglichst geschickt,

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\sin z}{z^2-1} \, \mathrm{d}z.$$

Schriftaufgabe

53 Ist a eine einfache Nullstelle der holomorphen Funktion f, also $f'(a) \neq 0$, so ist für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f'(w)}{f(w)} \, \mathrm{d}w = 1.$$

Votieraufgaben

54 Sei f eine ganze Funktion mit $|f(z)| \leqslant c\,|z|^n$ für $|z| > r_0$ mit gewissen $c > 0$, $r_0 > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f ein Polynom mit Grad $\leqslant n$.

55 Welche Funktionen auf $\mathbb{C}^*$ haben in 0 eine hebbare Singularität?

a. $\dfrac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$ *b.* $\mathrm{e}^{1/z}$ *c.* $\dfrac{z^2}{\sin^2 z}$

56 Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{C}^*$ stetig differenzierbar und geschlossen. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2},$$

wobei $x = \Re\gamma$ und $y = \Im\gamma$.

Schriftaufgabe

57 Es seien f und g ganze Funktionen mit $|f| \leqslant |g|$ auf ganz $\mathbb{C}$. Dann ist $f = cg$ mit einer Konstanten c.

Votieraufgaben

58 Sei f in einer punktierten Umgebung von a holomorph. Dann ist a genau dann ein Pol von f, falls $|f(z)| \to \infty$ für $z \to a$.

59 Ist Ω ein Gebiet, so bildet die Menge $\mathcal{M}(\Omega)$ aller meromorphen Funktionen auf Ω mit der üblichen Addition und Multiplikation einen Körper.

60 Sei f eine rationale Funktion, deren Nennergrad um $m \geqslant 1$ größer ist als der Zählergrad. Dann kann $z \mapsto f(1/z)$ in 0 zu einer holomorphen Funktionen mit einer m-fachen Nullstelle fortgesetzt werden.

61 Für eine rationale Funktion f sind folgende Aussagen äquivalent.
(i) f hat eine m-fache Nullstelle im Unendlichen.
(ii) Es gibt positive Zahlen $a < b$ und r, so dass

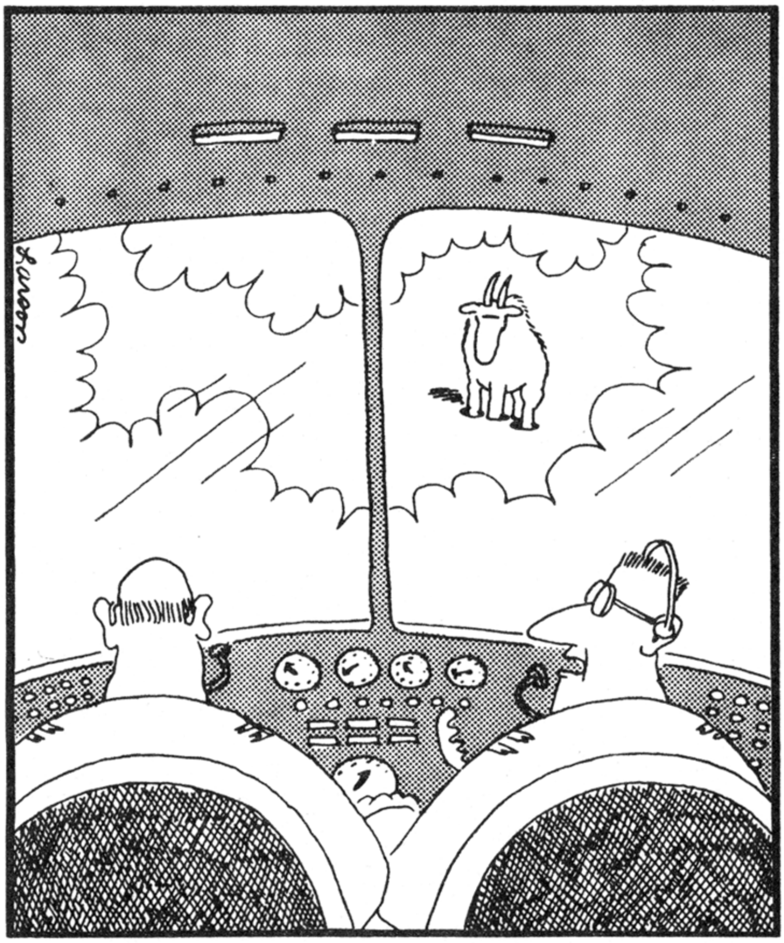
$$\frac{a}{|z|^m} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{b}{|z|^m}, \qquad |z| \geqslant r.$$

(iii) Die Funktion $z \mapsto f(1/z)$ ist in 0 holomorph fortsetzbar und hat dort eine m-fache Nullstelle.

Schriftaufgabe

62 Folgende Aussagen sind äquivalent.
a. a ist ein Pol von f der Ordnung m.
b. $z \mapsto (z-a)^m f(z)$ hat in a eine hebbare Singularität mit Wert $\neq 0$.
c. Es gibt positive Konstanten $A < B$, so dass in einer punktierten Umgebung von a

$$A\,|z-a|^{-m} \leqslant |f(z)| \leqslant B\,|z-a|^{-m}.$$



"Say . . . what's a mountain goat doing way up here in a cloud bank?"

Votieraufgaben

63 Sei f auf dem nichtleeren Kreisring $D_{s,r}(a)$ holomorph. Dann existieren zwei eindeutig bestimmte Funktionen g und h mit folgenden Eigenschaften.

(i) g ist holomorph auf $D_r(a)$ und h ist holomorph auf $D_{s,\infty}(a)$.

(ii) $\lim_{|z|\to\infty} h(z) = 0$.

(iii) $f = g + h$ auf $D_{s,r}(a)$.

64 Besitzt eine Potenzreihe einen Konvergenzradius $r \in (0, \infty)$, so liegt auf dem Rand des Konvergenzkreises eine nicht-hebbare Singularität der durch die Potenzreihe definierten holomorphen Funktion f.

65 Welche der folgenden Reihen ist eine Potenzreihe, und welche nicht? Mit Begründung natürlich.

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1 - z^2)^n$ *b.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z(1 - z^2)^n$ *c.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$

66 Für den reellen Arcussinus gilt

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - t^2}}, \qquad -1 < x < 1.$$

Diese Definition kann holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geqslant 1\}$ fortgesetzt werden.

Die letzte Schriftaufgabe

67 Sei γ eine geschlossene Jordankurve in $\mathbb{C}$, und $A = \mathbb{C} \setminus \gamma$. Zwei Punkte gehören dann zu derselben *Zusammenhangskomponente von* A, wenn sie sich durch einen Streckenzug in A verbinden lassen. Man zeige:

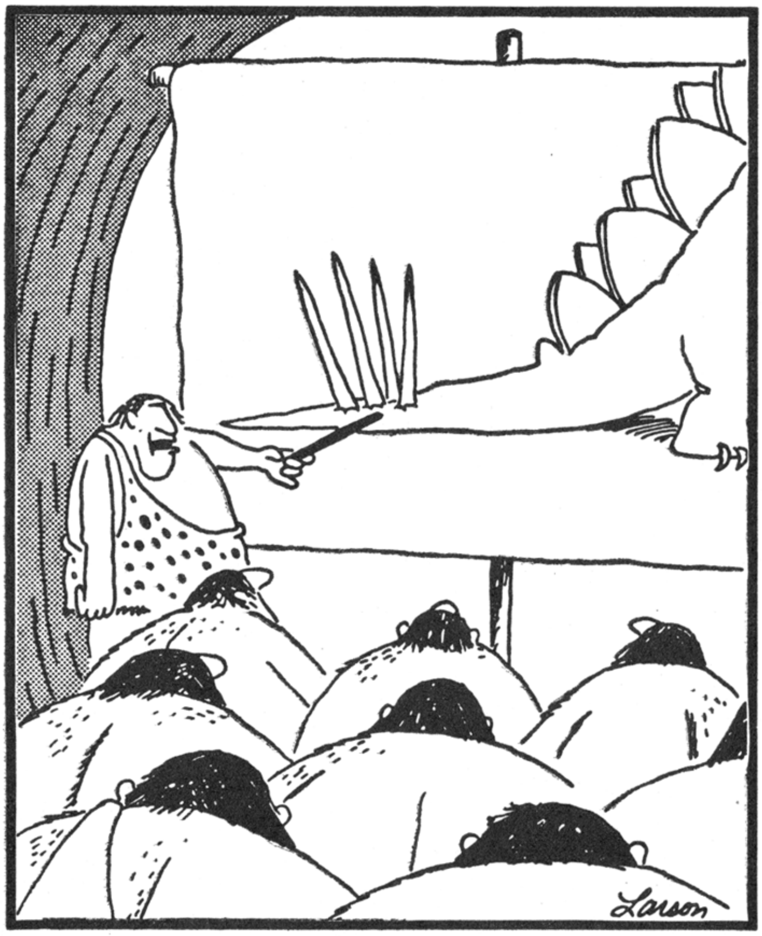
a. Jede Z-komponente ist offen und zusammenhängend.

b. Jeder Punkt $a \in A$ gehört zu genau einer Z-komponente.

c. Es gibt genau eine unbeschränkte Z-komponente, und dort gilt $\operatorname{ind}(\gamma, a) = 0$.

d. Alle Punkte einer Z-komponente haben dieselbe Windungszahl bezüglich γ.

e. Es gibt Punkte $a \in A$ mit $\operatorname{ind}(\gamma, a) \neq 0$.



"Now this end is called the thagomizer . . . after the late Thag Simmons."

Votieraufgaben

68 Bestimmen sie die Singularitäten und Residuen der folgenden meromorphen Funktionen.

a. $\dfrac{1}{\sin z}$ *b.* $\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ *c.* $\dfrac{\mathrm{e}^z}{(1+z)^2}$ *d.* $\dfrac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+n^2}$

69 Berechnen sie die folgenden Integrale.

a. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+2t^2+t^4}$ *b.* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

70 Sei a eine einfache Stelle einer holomorphen Funktion $f = u + \mathrm{i}v$. Dann sind lokal um a die Niveaumengen

$$U_c = \{u = c\}, \qquad V_c = \{v = c\}$$

für c in einer Umgebung von $f(a)$ reguläre, aufeinander senkrecht stehende Kurven.

71 *Holomorphie parameterabhängiger Integrale* Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon \Omega \times [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig und $f(\cdot,t)$ für jedes $t \in [a,b]$ holomorph auf Ω. Dann definiert

$$F(z) = \int_a^b f(z,t)\,\mathrm{d}t, \qquad z \in \Omega,$$

eine holomorphe Funktion F auf Ω.

72 *a.* Die Funktion $\varphi\colon z \mapsto \ln|z|$ ist harmonisch auf $\mathbb{C}^*$.
b. Ist $h\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ harmonisch, so existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $h - \alpha\varphi$ holomorph auf $\mathbb{C}^*$ fortgesetzt werden kann.
c. Ist $h\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ harmonisch und bei 0 lokal beschränkt, so kann h harmonisch in den Nullpunkt fortgesetzt werden.

"Whoa, Frank . . . Guess what youuuuuuuuu sat in!"