Analysis 4

Erste Modulprüfung

Ss 2019

04.10.2019

- Es gibt 8 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl steht am linken Rand.
- Die Maximalpunktzahl ist 32. Zum Bestehen der Klausur sind 13 Punkte hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- In allen Aufgaben sind alle Schritte zu begründen.
- Verwenden Sie pro Aufgabe jeweils ein neues Blatt.
- Abgaben mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Tragen Sie bitte Namen, Matrikelnummer sowie Namen Ihres Tutors ein.

Name	M-Nr	Tutor

1	2	3	4	5	6	7	8		Σ

⟨4⟩ **Aufgabe 1**
Beweisen sie, dass der Schwartzraum $\mathcal{S}_n$ dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt.

⟨4⟩ **Aufgabe 2**
Bestimmen sie für $\lambda > 0$ und fast alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert

$$\lim_{r\to\infty} \int_{[-r,r]} \frac{\sin \lambda t}{t} \mathrm{e}^{itx} \, \mathrm{d}t.$$

Hinweis: Die Fouriertransformierte von $t^{-1} \sin t$ ist $\sqrt{\pi/2} \cdot \chi_{[-1,1]}$.

Lösung ⇛ In L^2 gilt

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty} \int_{[-r,r]} \frac{\sin \lambda t}{t} \mathrm{e}^{itx} \, \mathrm{d}t &= \lim_{r\to\infty} \int_{[-r,r]} \frac{\sin t}{t} \mathrm{e}^{itx/\lambda} \, \mathrm{d}t \\ &\to \mathcal{F}^{-1}(t^{-1} \sin t)(x/\lambda) \\ &= \alpha\chi_{[-1,1]}(x/\lambda) \\ &= \alpha\chi_{[-\lambda,\lambda]}(x)\end{aligned}$$

mit $\alpha = \sqrt{\pi/2}$. Mit anderen Worten,

$$\chi_{[-\lambda,\lambda]}\hat{} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda t}{t}.$$

Daraus folgt

$$\lim_{r\to\infty} \int_{[-r,r]} \frac{\sin \lambda t}{t} \mathrm{e}^{itx} \, \mathrm{d}t =_\lambda \alpha\chi_{[-\lambda,\lambda]} = \begin{cases} \alpha, & |x| < \lambda, \\ 0, & |x| > \lambda. \end{cases}$$ ⇚

⟨3⟩ **Aufgabe 3**
Finden sie eine Fundamentallösung für $L = \partial_1\partial_2$ auf $\mathbb{R}^2$.

Lösung ⇛ Es ist

$$\delta = \partial_1\partial_2\chi_Q, \qquad Q = [0,\infty) \times [0,\infty).$$

Denn

$$\begin{aligned}(\partial_1\partial_2\chi_Q)(\varphi) &= \chi_Q(\partial_1\partial_2\varphi) \\ &= \int_Q \partial_1\partial_2\varphi \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \partial_1\partial_2\varphi(x_1,x_2) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \\ &= -\int_0^\infty \partial_1\varphi(x_1,0) \, \mathrm{d}x_1 \\ &= \varphi(0,0) = \delta(\varphi).\end{aligned}$$ ⇚

⟨4⟩ **Aufgabe 4**
Auf $\mathbb{R}$ sei $g(t) = \mathrm{e}^t \cos(\mathrm{e}^t)$ und $h(t) = \mathrm{e}^t$. Dann ist g eine temperierte Distribution, nicht aber h.

Lösung ⏩ Für eine Schwartzfunkton φ ist

$$\Lambda_g \varphi = \int g\varphi = \int \mathrm{e}^t \cos(\mathrm{e}^t)\, \varphi = -\int \sin(\mathrm{e}^t)\, \varphi',$$

also

$$|\Lambda_g \varphi| \leqslant \int |\varphi'| \leqslant \sup_{\mathbb{R}} (1+t^2)\, |\varphi'(t)| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} \leqslant c\, \|\varphi\|_{1,1}.$$

Also ist Λ_g stetig. Dagegen ist $\Lambda_h \varphi$ nicht einmal endlich, wenn wir eine Schwartzfunktion φ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset [0,\infty)$ und $\varphi(t) = \mathrm{e}^{-t}$ für $t \geqslant 1$ wählen. ⏪

⟨3⟩ **Aufgabe 5**
Für welche $n \in \mathbb{Z}$ besitzt

$$f:\ \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{z^n}$$

eine Stammfunktion? Geben sie diese Stammfunktion an, oder begründen sie, dass es keine gibt.

⟨4⟩ **Aufgabe 6**

Die holomorphe Funktion f besitze in $z = 0$ eine doppelte Nullstelle. Dann gilt für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{f''(z)}{f'(z)}\,\mathrm{d}z = 1.$$

⟨6⟩ **Aufgabe 7**

Sei

$$f(z) = \frac{z-1}{(z^2+1)^2}.$$

a. Bestimmen sie den maximalen Definitionsbereich von f in $\mathbb{C}$ und die Art der Singularitäten von f.

b. Bestimmen sie die Residuen von f in diesen Singularitäten.

c. Bestimmen sie

$$\int_{\partial D_r} f(z)\,\mathrm{d}z$$

für $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ einmal für $0 < r < 1$ und einmal für $r > 1$.

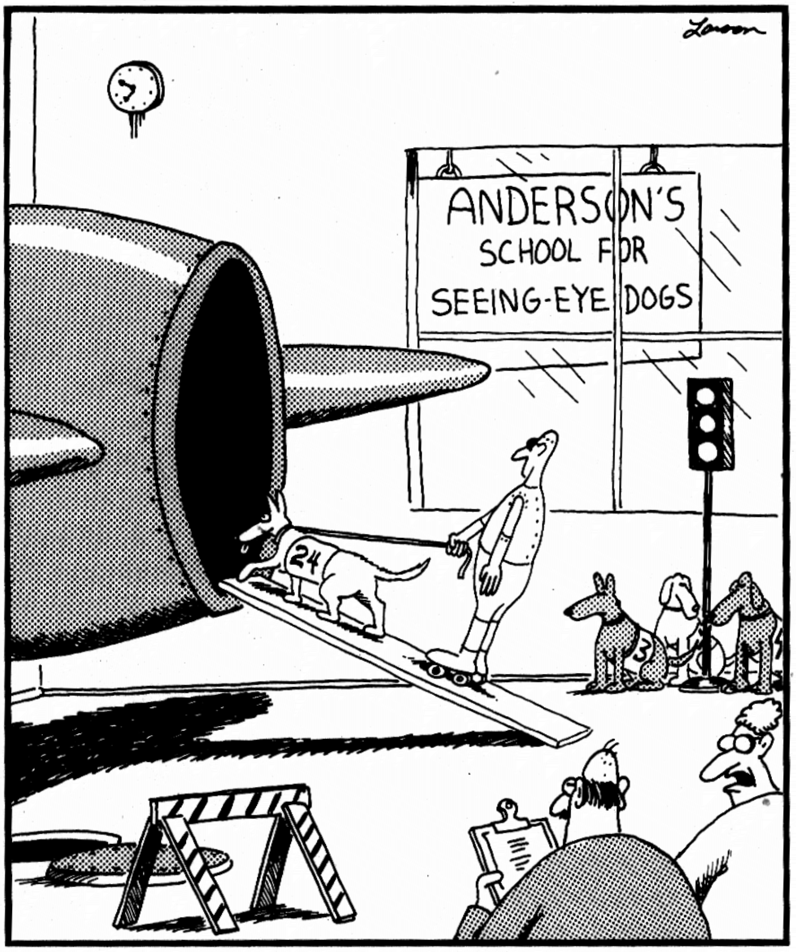
d. Bestimmen sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t-1}{t^4+2t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

⟨4⟩ **Aufgabe 8**

a. Wie lautet der Fundamentalsatz der Algebra?

b. Geben sie für diesen einen Beweis.



"Well, scratch No. 24. He did pretty good, though — right up to the jet engine test."