Analysis 4

Erste Scheinklausur

Ss 2019

01.06.2019

- Es gibt 8 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl steht am linken Rand.
- Die Maximalpunktzahl ist 28. Zum Bestehen der Klausur sind 11 Punkte hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- In allen Aufgaben sind alle Schritte zu begründen.
- Verwenden Sie pro Aufgabe jeweils ein neues Blatt.
- Abgaben mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Tragen Sie bitte Namen, Matrikelnummer sowie Namen Ihres Tutors ein.

Name M-Nr Tutor

1	2	3	4	5	6	7	8		Σ

⟨2⟩ **Aufgabe 1**

Gegeben sind die Fourierreihendarstellungen (im L^2-Sinne)

$$f \sim \sum \hat{f}_n \mathrm{e}^{int}, \qquad g \sim \sum \hat{g}_n \mathrm{e}^{int}.$$

Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(x-t) \, \mathrm{d}t \sim \sum \hat{f}_n \hat{g}_n \mathrm{e}^{inx}.$$

Mit anderen Worten, es gilt $(f * g)\hat{} = (\hat{f}_n \hat{g}_n)_n$.

⟨4⟩ **Aufgabe 2**

Der Satz von Hahn-Banach impliziert, dass sich das stetige lineare Funktional

$$\Phi : \; C_0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \Phi(f) = f(0)$$

zu einem ebensolchen Funktional auf $L^\infty(\lambda)$ ausdehnen lässt. Zeigen sie, dass es jedoch kein $g \in L^1(\lambda)$ gibt, so dass

$$\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} fg \, \mathrm{d}\lambda, \qquad f \in C_0(\mathbb{R}).$$

⟨6⟩ **Aufgabe 3**

Man bestimme die reellen Fourierreihen der beiden Funktionen

a. $f(t) = |\cos t|$ *b.* $f(t) = t^2, \quad |t| \leqslant \pi$

⟨4⟩ **Aufgabe 4**

Bestimmen sie die Fouriertransformationen der folgenden Funktionen.

a. $\mathrm{e}^{-|x|}$ *b.* $\dfrac{1}{1+x^2}$

⟨3⟩ **Aufgabe 5**

Sei (f_n) eine Folge in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_K |f_n| \, \mathrm{d}\lambda = 0, \qquad K \subset\subset \Omega.$$

Dann gilt $D^\alpha f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$ für alle α.

⟨3⟩ **Aufgabe 6**
Sei $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ und $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Stellen Sie

$$(f \circ A)\widehat{\ }$$

mit Hilfe von $\hat{f}$ dar.

⟨3⟩ **Aufgabe 7**
Sei $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ und $\tau_h \Lambda = \Lambda \circ \tau_{-h}$. Dann gilt

$$\frac{1}{h}(\Lambda - \tau_h \Lambda) \xrightarrow{\mathcal{D}'} D\Lambda.$$

$D\Lambda$ ist somit Grenzwert von üblichen Differenzenquotienten.

⟨3⟩ **Aufgabe 8**
Ist $f \in \mathcal{S}_n$ und $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, so ist auch $f * g \in \mathcal{S}_n$.