Analysis 4

Zweite Scheinklausur

Ss 2019

22.07.2019

— Es gibt 9 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl steht am linken Rand.
— Die Maximalpunktzahl ist 30. Zum Bestehen der Klausur sind 12 Punkte hinreichend.
— Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
— Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
— In allen Aufgaben sind alle Schritte zu begründen.
— Verwenden Sie pro Aufgabe jeweils ein neues Blatt.
— Abgaben mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
— Tragen Sie bitte Namen, Matrikelnummer sowie Namen Ihres Tutors ein.

Name	M-Nr	Tutor

1	2	3	4	5	6	7	8	9		Σ

⟨3⟩ **Aufgabe 1**
Gegeben ist die Funktion

$$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = z\bar{z}.$$

a. Die Funktion f ist im Punkt 0 komplex differenzierbar.
b. In jedem anderen Punkt ist f nicht komplex differenzierbar.

⟨2⟩ **Aufgabe 2**
Wie lauten die Cauchy-Riemann-Gleichungen?

⟨3⟩ **Aufgabe 3**
Sei f komplex differenzierbar in einer Umgebung der Kreisscheibe D.
a. Stellen Sie $f(z)$ für $z \in D$ durch ein Integral über ∂D dar.
b. Bestimmen Sie mit dieser Formel

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z(z-2)}.$$

⟨3⟩ **Aufgabe 4**
Mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes zeige man

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} = \pi.$$

⟨4⟩ **Aufgabe 5**
Folgende Aussagen sind äquivalent.
a. a ist ein Pol von f der Ordnung m.
b. $z \mapsto (z-a)^m f(z)$ hat in a eine hebbare Singularität mit Wert $\neq 0$.
c. Es gibt positive Konstanten $A < B$, so dass in einer punktierten Umgebung von a

$$A\,|z-a|^{-m} \leqslant |f(z)| \leqslant B\,|z-a|^{-m}.$$

⟨2⟩ **Aufgabe 6**
Warum besitzt die Funktion

$$f: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad f(z) = \frac{1}{z}$$

keine Stammfunktion?

⟨2⟩ **Aufgabe 7**
Sei $f\colon D_1(0) \to D_1(0)$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann besitzt die Funktion ϕ mit

$$\phi(z) = \frac{f(z)}{z}, \qquad z \neq 0,$$

in 0 eine hebbare Singularität.

⟨5⟩ **Aufgabe 8**
Sei wieder $f\colon D_1(0) \to D_1(0)$ holomorph mit $f(0) = 0$, und

$$\phi(z) = \frac{f(z)}{z}, \qquad z \neq 0.$$

a. Es gilt

$$\|\phi\|_{D_r(0)} \coloneqq \sup_{z \in D_r(0)} |\phi(z)| \leqslant \frac{1}{r}, \qquad 0 < r < 1.$$

Hinweis: Maximumprinzip.

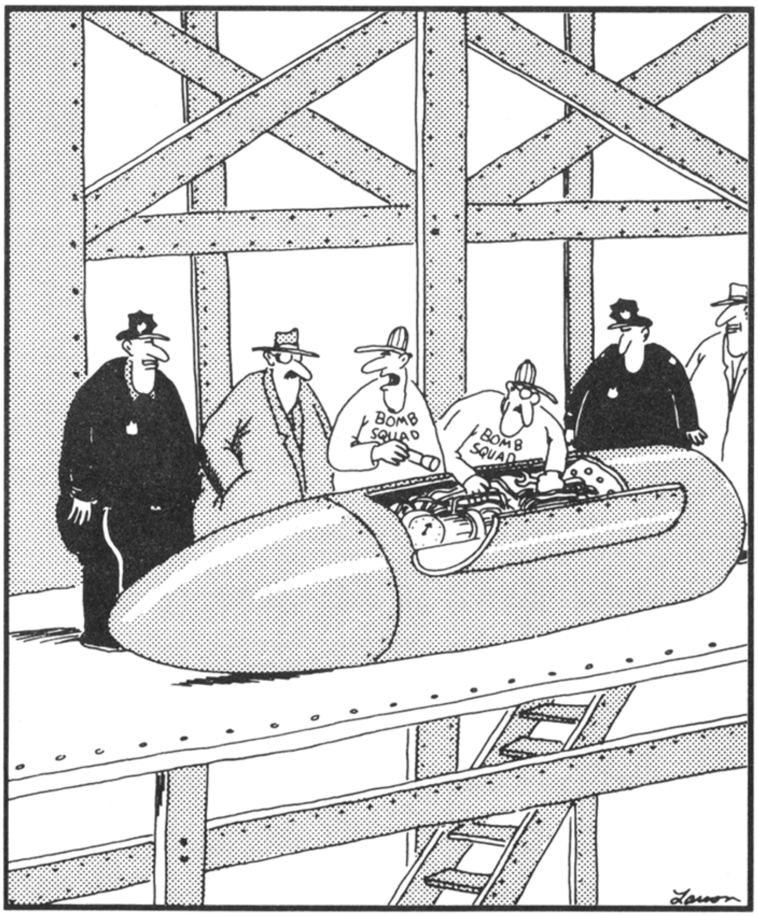
b. Es folgt

$$\|\phi\|_{D_1(0)} \leqslant 1.$$

c. Daraus folgt weiter $|f'(0)| \leqslant 1$.

⟨6⟩ **Aufgabe 9**
Bestimmen sie die Singularitäten und Residuen der folgenden meromorphen Funktionen.

a. $\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ *b.* $\dfrac{\mathrm{e}^z}{(1+z)^2}$ *c.* $\dfrac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+4}$



"Well, it's a delicate situation, sir. . . . Sophisticated firing system, hair-trigger mechanisms, and Bob's wife just left him last night, so you *know* his mind's not into this."