Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Höhere Analysis (SS 2019)

Vortragsübungsblatt 1

Aufgabe 1.1.

Sei E ein Hilbertraum mit Innenprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $a, b \in E$ Elemente mit $\langle a, b\rangle > 0$. Zeigen Sie, dass unter den Elemente $x \in E$ mit $\langle a, x\rangle \geq 1$ und $\langle b, x\rangle \geq 1$ ein eindeutiges Element mit minimaler Norm existiert.

Aufgabe 1.2.

(a) Sei E Hilbertraum und $A \subset E$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- **(i)** Ist A ein abgeschlossener Teilraum, dann ist A ein Hilbertraum.
- **(ii)** A ist genau dann dicht in E, wenn $A^\perp = \{0\}$.
- **(iii)** $A^\perp$ ist ein abgeschlossener Teilraum von E.
- **(iv)** Ist $0 \in A$, dann $A \cap A^\perp = \{0\}$, sonst $A \cap A^\perp = \emptyset$.
- **(v)** Ist $B \subset A$, dann $A^\perp \subset B^\perp$.

(b) Wir definieren die Teilräume der geraden und ungeraden Funktionen[1] in $L^2(\mathbb{T})$:

$$L^2_{\text{even}}(\mathbb{T}) := \{[f] \in L^2(\mathbb{T}) \mid f(x) = f(-x) \text{ für fast alle } x \in \mathbb{T}\},$$
$$L^2_{\text{odd}}(\mathbb{T}) := \{[f] \in L^2(\mathbb{T}) \mid f(x) = -f(-x) \text{ für fast alle } x \in \mathbb{T}\}.$$

Zeigen Sie, dass $L^2_{\text{even}}(\mathbb{T})^\perp = L^2_{\text{odd}}(\mathbb{T})$ und folgern Sie

$$L^2(\mathbb{T}) = L^2_{\text{even}}(\mathbb{T}) \oplus L^2_{\text{odd}}(\mathbb{T}).$$

Aufgabe 1.3.

Wir betrachten einen komplexen Hilbertraum E mit Innenprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und zugehöriger Norm $\|\cdot\|$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \neq \pm 1$ eine n-te Einheitswurzel. Beweisen Sie die Identitäten

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \|x + \alpha^k y\|^2 \alpha^k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|x + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} y\|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

für beliebige $x, y \in E$.

Aufgabe 1.4.

Nutzen Sie die Theorie der Fourierreihen (bzw. der Orthonormalbasen) und zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Dieses Vortragsübungsblatt wird am
Dienstag, den 16.4.2019
besprochen.

[1] Wie üblich sprechen wir von Funktionen, meinen aber eigentlich deren Äquivalenzklassen im L^p-Raum. Die Äquivalenzklasse einer messbaren Funktion f wird wie in der Vorlesung mit $[f]$ bezeichnet.

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Höhere Analysis (SS 2019)

Vortragsübungsblatt 2

Aufgabe 2.1.

Sei $z \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ und definiere die Funktion $f(x) := \cos(zx)$. Zeigen Sie, dass die Fourierreihe von f durch

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sin(\pi z)\frac{(-1)^n}{2\pi}\left(\frac{1}{z+n}+\frac{1}{z-n}\right)\mathrm{e}^{inx}$$

gegeben ist. Wie lautet die Entwicklung von $\cos(zx)$ in Kosinus- und Sinusfunktionen?

Nutzen Sie die obige Darstellung um zu zeigen, dass

$$\pi\cot(\pi z) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{z+n}.$$

Aufgabe 2.2.

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - x & \text{, für } x \in [-\pi, 0) \\ 0 & \text{, für } x = 0 \\ \frac{\pi}{2} - x & \text{, für } x \in (0, \pi) \end{cases}$$

und bestimmen Sie deren Fourierreihe. Wo konvergiert die Reihe gleichmäßig gegen f?

Aufgabe 2.3.

Beweisen Sie die folgenden Identitäten für die Fouriertransformation

(a) Gilt $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ und $g \in L^2(\mathbb{T})$, dann $(fg)\hat{}_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}_{n-k}\hat{g}_k$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Gilt $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, dann $(f*g)\hat{}_n = \hat{f}_n\hat{g}_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Hierbei ist

$$f*g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y,$$

für periodisch fortgesetzte f und g.

Aufgabe 2.4.

Sei $f \in L^2(\mathbb{T})$, so dass $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|n|^2|\hat{f}_n|^2 < \infty$. Zeigen Sie, dass die Fourierreihe von f absolut und fast überall gleichmäßig gegen f konvergiert.

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Aufgabe 2.5.

Wir definieren $s(\mathbb{Z})$ als den Vektorraum aller Familien $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, so dass

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |n^k x_n| < \infty, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Sei außerdem $C^\infty(\mathbb{T})$ der Raum der unendlich oft differenzierbaren periodischen Funktionen $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, d.h. $f^{(k)}(\pi) = f^{(k)}(-\pi)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass die diskrete Fouriertransformation

$$\mathcal{F}\colon C^\infty(\mathbb{T}) \to s(\mathbb{Z})\colon f \mapsto (\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

eine bijektive Abbildung ist.

Dieses Vortragsübungsblatt wird am

Dienstag, den 23.4.2019

besprochen.

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Höhere Analysis (SS 2019)

Vortragsübungsblatt 3

Aufgabe 3.1.

Entscheiden Sie bei der jeweiligen auf $[-\pi, \pi)$ definierten Funktion f, auf welchen Teilmengen von $\mathbb{T}$ deren Fourierpolynome $s_n f$ gleichmäßig oder punktweise gegen ihre Funktion konvergieren.

(a) $\cos(zx)$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

(b) $\operatorname{sgn}(x)$

(c) $|\sin(x)|$

(d) $\operatorname{sgn}(x)(\frac{\pi}{2} - |x|)$

Aufgabe 3.2.

Sei $C^\infty([-\pi, \pi] \times [0, \infty))$ der Vektorraum der Funktionen $u \in C^\infty([-\pi, \pi] \times [0, \infty))$, so dass $\partial_x^k u(\pi, t) = \partial_x^k u(-\pi, t)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $t \geq 0$. Sei außerdem

$$\widehat{u}(n, t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} u(x, t) \mathrm{e}^{-inx} \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Vergewissern Sie sich davon, dass $\widehat{u}(n, \cdot) \in C^\infty([0, \infty))$ mit $\partial_t \widehat{u}(n, t) = \widehat{\partial_t u}(n, t)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $t \geq 0$, sowie

$$\partial_x^l \partial_t^m u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathrm{i}n)^k \partial_t^m \widehat{u}(n, t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

für alle $k, m \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{T}$ und $t \geq 0$.

Aufgabe 3.3.

Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung in einer Dimension:

$$\begin{cases} \alpha \, \partial_x^2 u(x, t) = \partial_t u(x, t), & \text{für } x \in \mathbb{T}, \ t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & \text{für } x \in \mathbb{T} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass zu $f \in C^\infty(\mathbb{T})$ eine eindeutige Lösung $u \in C^\infty(\mathbb{T} \times [0, \infty))$ existiert.

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Aufgabe 3.4.

In dieser Aufgabe konzentrieren wir uns auf die inverse diskrete Fouriertransformation. Für $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in \ell^1(\mathbb{Z})$ setzen wir

$$\mathcal{F}^{-1}x(\theta) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \quad \text{für } \theta \in \mathbb{T} \text{ und}$$

$$z = x * y \quad \text{mit} \quad z_n := \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_{n-k}\, y_k.$$

Mit der diskreten Faltung $(x, y) \mapsto x * y$ wird $\ell^1(\mathbb{Z})$ zu einer Algebra mit Eins.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}^{-1} \colon \ell^1(\mathbb{Z}) \to C(\mathbb{T})$ ein injektiver, stetiger Algebrahomomorphismus ist. Hierbei definieren wir auf $C(\mathbb{T})$ die punktweise Multiplikation.

(b) Beweisen Sie *Wieners Lemma*:
$x \in \ell^1(\mathbb{Z})$ ist genau dann bezüglich der diskreten Faltung invertierbar, wenn $\mathcal{F}^{-1}x(\theta) \neq 0$ für alle $\theta \in \mathbb{T}$.

Dieses Vortragsübungsblatt wird am
Dienstag, den 30.4.2019
besprochen.

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Höhere Analysis (SS 2019)

Vortragsübungsblatt 4

Aufgabe 4.1.

Seien $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $k \in \mathbb{N}$.

(a) Angenommen $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^k |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty$. Zeigen Sie, dass dann $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ mit

$$D_\alpha \widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} (-x)^\alpha f(x) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle t,x\rangle} \mathrm{d}x, \quad \text{für } |\alpha| \le k.$$

(b) Angenommen $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ mit $D_\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für $|\alpha| \le k$. Zeigen Sie, dass dann

$$t^\alpha \widehat{f}(t) = \mathcal{F}(D_\alpha f)(t), \quad \text{für } |\alpha| \le k.$$

Aufgabe 4.2.

Für eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definieren wir

$$\|f\|_{N,(p)} := \left(\sum_{|\alpha| \le N} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{Np} |D_\alpha f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \text{für } p \in [1, \infty),$$
$$\|f\|_{N,(\infty)} := \sup_{|\alpha| \le N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^N |D_\alpha f(x)|.$$

Zeigen Sie, dass es für alle $p \in [1, \infty]$ und $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$f \in \mathcal{S}_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{N \in \mathbb{N}} \colon \|f\|_{N,(p)} < \infty.$$

Aufgabe 4.3.

Zeigen Sie, dass es auf dem Schwartzraum $\mathcal{S}_n$ keine Norm gibt, die den gleichen Konvergenzbegriff definiert, wie die Metrik

$$d(f, g) = \sum_{N=1}^{\infty} 2^{-N} \frac{\|f - g\|_{N,(\infty)}}{1 + \|f - g\|_{N,(\infty)}}.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Kommutatorrelation der stetigen Operatoren ∂_j und m_j, wobei $(m_j f)(x) = x_j f(x)$.

Dieses Vortragsübungsblatt wird am
Dienstag, den 7.5.2019
besprochen.

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Höhere Analysis (SS 2019)

Vortragsübungsblatt 5

Aufgabe 5.1.

(a) Sei $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$, so dass $x \mapsto xg'(x)$ ebenfalls in $L^1(\mathbb{R})$ ist. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} xg'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

(b) Sei nun $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ mit $\|f\|_2 = 1$, so dass $x \mapsto xf(x)$ und f' ebenfalls in $L^2(\mathbb{R})$ sind. Beweisen Sie die *Heisenberg'sche Unschärferelation*: Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{1}{4} \le ⨍_{\mathbb{R}} (x-\alpha)^2 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \cdot ⨍_{\mathbb{R}} (p-\beta)^2 |\widehat{f}(p)|^2\,\mathrm{d}p\,.$$

Aufgabe 5.2.

Die Hermitefunktionen[1] $h_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}_0$, sind definiert durch

$$h_n(x) := \frac{(-1)^n\,2^{1/4}}{\sqrt{2^n n!}} e^{x^2/2}\,\partial_x^n e^{-x^2}, \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Weiter sind die Leiteroperatoren gegeben durch

$$a^*\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2}}(x-\partial_x)\varphi(x), \quad a\,\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2}}(x+\partial_x)\varphi(x), \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{S}_1.$$

Zeigen Sie:

(a) $ah_0 = 0$ und $h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} a^* h_{n-1}$ sowie $a\,h_n = \sqrt{n}\,h_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\hat{h}_n = (-i)^n h_n$.

(c) Die lineare Hülle der Hermitepolynome

$$H_n(x) := h_n(x)\mathrm{e}^{x^2/2}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

besteht aus allen Polynomialfunktionen auf $\mathbb{R}$.

(d) Die Hermitefunktionen bilden eine Orthonormalbasis in $L^2(\mathbb{R})$.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass $f \perp h_k$ für alle k und berechnen Sie $\langle f, g_k\rangle$ für $g_k(x) = \frac{(-\mathrm{i}tx)^k}{k!}\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

---

[1] In der Literatur werden eigentlich die Funktionen $(2\pi)^{1/4}h_n$ und $(2\pi)^{1/4}H_n$ als Hermitefunktionen und -polynome bezeichnet. Wir benutzen eine leicht abgeänderte Definition, um unseren zusätzlichen Faktor in der L^2-Norm zu kompensieren.

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Aufgabe 5.3.

Der (quantenmechanische) harmonische Oszillator wird durch den linearen Operator

$$H\varphi(x) := \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + x^2)\varphi(x), \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{S}_1,$$

modeliert.

(a) Zeigen Sie, dass $H = a^* a + \frac{1}{2}\,\mathrm{id}_{\mathcal{S}_1}$ und die Hermitefunktionen auch Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators sind.

(b) Beweisen Sie: Eine Folge $(\varphi_n) \subset \mathcal{S}_1$ konvergiert genau dann gegen φ in $\mathcal{S}_1$, wenn

$$\int_{\mathbb{R}} |H^k(\varphi_n - \varphi)(x)|^2 \,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $\varphi \in \mathcal{S}_1$

$$\sum_{k=0}^{n} h_k \langle \varphi, h_k \rangle \xrightarrow{n\to\infty} \varphi \quad \text{in } \mathcal{S}_1.$$

D.h. die Hermitefunktionen $(h_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ bilden eine sogenannte *Schauderbasis* von $\mathcal{S}_1$.

Dieses Vortragsübungsblatt wird am
Dienstag, den 14.5.2019
besprochen.

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Höhere Analysis (SS 2019)

Vortragsübungsblatt 6

Aufgabe 6.1.

Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $\Omega = (a,b)$. Angenommen die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ist stetig differenzierbar auf $[a,b]$ bis auf endlich viele Sprungstellen $x_1, \ldots, x_n \in (a,b)$. Sei f' die punktweise Ableitung von f außerhalb der Sprungstellen. Zeigen Sie, dass dann für die distributionelle Ableitung

$$D\Lambda_f = \Lambda_{f'} + \sum_{j=1}^{n} (f(x_j+) - f(x_j-))\, \delta_{x_j}$$

als Distribution in $\mathcal{D}'(\Omega)$ gilt und überlegen Sie sich ein Beispiel für f und $D\Lambda_f$.

Aufgabe 6.2.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $f_j, f \in L^1_{loc}(\Omega)$ für $j \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Konvergenzverhalten die Konvergenz von $\Lambda_{f_j} \to \Lambda_f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ impliziert.

(a) Es existiert $p \in [1, \infty]$ mit $f_j, f \in L^p(\Omega)$ für $j \in \mathbb{N}$ und $\|f_j - f\|_p \to 0$.

(b) Es existiert $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit $|f_j| \leq g$ fast überall für alle $j \in \mathbb{N}$ und es gilt $f_j \to f$ punktweise fast überall.

Punktweise Konvergenz der f_j gegen f impliziert noch *nicht* die Konvergenz in $\mathcal{D}'(\Omega)$

(c) Finden Sie f, f_j, so dass $f_j(x) \to f(x)$ für alle $x \in \Omega$, aber $\Lambda_{f_j} \nrightarrow \Lambda_f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Aufgabe 6.3.

Nun widmen wir uns der Faltung von Testfunktionen mit Distributionen.

(a) Zeigen Sie, dass der Raum der Testfunktionen $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ auch eine Algebra bezügliche der Faltung ist.

(b) Seien $\Lambda \in \mathcal{D}'_n$ und $\varphi \in \mathcal{D}_n$. Zeigen Sie, dass die Faltung

$$\Lambda * \varphi(x) := \Lambda \tau_x \breve{\varphi}$$

eine glatte Funktionen definiert. Hierbei $\breve{\varphi}(y) = \varphi(-y)$ und $\tau_x \varphi(y) = \varphi(y - x)$.

(c) Vergewissern Sie sich davon, dass $\delta_x * \varphi = \tau_x \varphi$.

Sei nun $(\varphi_j)_j \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ eine Dirac-Folge. In der Vorlesungen wurden gezeigt, dass $D_{\varphi_j} \to \delta_0$ in $\mathcal{D}'_n$.

(d) Für welche Dirac-Folgen $(\varphi_j)_j$ gilt auch $\varphi_j * \psi \to \psi$ in $\mathcal{D}_n$ für alle $\psi \in \mathcal{D}_n$?

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Aufgabe 6.4.

Seien $\Lambda \in \mathcal{D}'_n$ mit $D_n\Lambda = 0$. Sei e_n der n-te Basisvektor der Standardbasis im $\mathbb{R}^n$.

(a) $\Lambda \circ \tau_{he_n} = \Lambda$ für alle $h \in \mathbb{R}$

(b) Falls $\Lambda = \Lambda_u$ für eine stetige Funktion u, dann gilt $u(x', x_n) = u(x', 0)$ für alle $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $x_n \in \mathbb{R}$.

Dieses Vortragsübungsblatt wird am
Dienstag, den 21.5.2019
besprochen.

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Höhere Analysis (SS 2019)

Vortragsübungsblatt 7

Aufgabe 7.1.

Aus der Analysis ist bereits bekannt, dass

$$u(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

eine Stammfunktion von $f \in L^1(\mathbb{R})$ ist. Zeigen Sie, dass $u = E * f$ mit der Fundamentallösung E auf das gleiche Resulat führt.

Lösung 1

Wir betrachten die Differentialgleichung $u' = f$. Die Fundamentallösung E dieser Differentialgleichung erfüllt $E' = \delta$. Wir wissen bereits, dass die distributionelle Ableitung der Heavysidefunktion H die Deltadistribution ist. Dementsprechend gilt

$$u(x) = (E * f)(x) = (H * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) \cdot f(x-t)\, dt = \int_{0}^{\infty} f(x-t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Aufgabe 7.2.

Die Laplacegleichung auf $\mathbb{R}^n$ lautet $\Delta u = f$. Zeigen Sie, dass

$$E(r) = \frac{1}{(n-2)\omega_n r^{n-2}}$$

eine Fundamentallösung für $n \geq 3$ ist. Dabei ist ω_n das Volumen der Einheitsspäre in $\mathbb{R}^n$ und $r = |x|$. Wie lautet die Fundamentallösung E für $n \in \{1, 2\}$?

Lösung 2

Diese Distribution hat offensichtlich ihren Träger im Nullpunkt, denn für jede Testfunktion ϕ mit $0 \notin \operatorname{supp}(\phi)$ ist $(\Delta E)(\phi) = \delta(\phi) = \phi(0) = 0$. Wir betrachten daher zuerst die harmonische Gleichung $\Delta E = 0$ auf $\mathbb{R}^n$. Suche eine rotationssymmetrische Lösung, d.h. $E = v(r)$ und [Bemerkung: $\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + Winkelableitungen$ in Kugelkoordinaten]

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0.$$

[Bemerkung: $v'(r) \neq 0$ sieht man später]

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{v''(r)}{v'(r)} = -\frac{n-1}{r} \\
&\Rightarrow \int \frac{v''(r)}{v'(r)}\, dr = \int \frac{1-n}{r}\, dr \\
&\Leftrightarrow \int \frac{1}{z}\, dz = (1-n)\ln(r) + C
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \ln(v'(r)) = (1-n)\ln(r) + C\\
&\Leftrightarrow v'(r) = e^C e^{\ln(r)\cdot(1-n)} =: a(2-n)r^{1-n}\\
&\Rightarrow v(r) = ar^{2-n} + b
\end{aligned}
$$

mit Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. Wähle diese so, dass $(\Delta E)(\phi) = \phi(0)$ für jede Testfunktion ϕ gilt. Es ist

$$(\Delta E)(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta E \cdot \phi \, dx \overset{part.}{\underset{Int.}{=}} \int_{\mathbb{R}^n} E \cdot \Delta\phi \, dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\Omega_\epsilon} E \cdot \Delta\phi \, dx$$

mit $\Omega_\epsilon := \{x : |x| > \epsilon\}$. Wie wir anfangs gesehen haben, ist $\Delta E = 0$ auf Ω_ϵ, damit können wir den Satz von Green anwenden:

$$(\Delta E)(\phi) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\Omega_\epsilon} E \cdot \Delta\phi - \phi \cdot \Delta E \, dx \overset{Green}{=} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial\Omega_\epsilon} E \cdot \partial_r\phi - \phi \cdot \partial_r E \, dS.$$

Aus $E = \mathcal{O}(\epsilon^{2-n})$ folgt $\int_{\partial\Omega_\epsilon} E \cdot \partial_r\phi \, dS = \mathcal{O}(\epsilon^{2-n} \cdot \epsilon^{n-1}) = \mathcal{O}(\epsilon)$, dieses Integral verschindet dementsprechend für $\epsilon \to 0$. In das verbleibende Integral können wir $\partial_r E = v'(r) = a(2-n)r^{1-n}$ einsetzen:

$$
\begin{aligned}
(\Delta E)(\phi) &= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial\Omega_\epsilon} -\phi \cdot \partial_r E \, dS\\
&= a(n-2) \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\phi}{r^{n-1}} \, dS\\
&\overset{Subst.}{\underset{u=x/\epsilon}{=}} a(n-2) \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{S}^n} \phi \circ \epsilon \, dS\\
&= a(n-2)\phi(0)|\mathbb{S}^n|.
\end{aligned}
$$

Sei $\omega_n := |\mathbb{S}^n|$, dann folgt $(\Delta E)(\phi) = \phi(0) \Leftrightarrow a(n-2)\omega_n = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{(n-2)\omega_n}$ [Spätestens hier wäre klar: $v' \sim \pm a$, $a \sim \pm 1/(...) \Rightarrow v' \sim 1/(...) > 0$]. Wähle $b = 0$, dann folgt die Behauptung.

Für $n = 2$ verläuft die Rechung analog bis $v'(r) = ar^{1-n}$, es folgt $v(r) = a\ln(r) + b$. Wähle $b = 0$, dann gilt

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} E \cdot \partial_r\phi \, dS = \epsilon\ln(\epsilon) \overset{\epsilon\to 0}{\to} 0$$

und

$$
\begin{aligned}
(\Delta E)(\phi) &= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial\Omega_\epsilon} -\phi \cdot \partial_r E \, dS\\
&= -a \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\phi}{r} \, dS\\
&\overset{Subst.}{\underset{u=x/\epsilon}{=}} -a \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{S}^n} \phi \circ \epsilon \, dS\\
&= -a\phi(0)|\mathbb{S}^n|.
\end{aligned}
$$

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Es folgt $a = -\frac{1}{2\pi}$ [Vorzeichenfehler im Buch].

Für $n = 1$ wissen wir bereits, dass $H' = \delta$ für die Heavysidefunktion H gilt. Dementsprechend ist

$$E'(x) = H(x) \overset{7.1}{\Leftarrow} E(x) = \int_{-\infty}^{x} H(x)\,dx = \chi_{[0,\infty)}(x) \cdot x.$$

Aufgabe 7.3.

Zeigen Sie, dass mit $r = |x|$

$$E(r) = \frac{\cos(cr)}{4\pi r}$$

eine Fundamentallösung von $(\Delta + c^2)u = f$ in $\mathbb{R}^3$ für alle $c \in \mathbb{R}$ ist.

Lösung 3

Der Nachweiß geht analog zum Beweis in Aufgabe 2: Zuerst zeigen wir, dass $(\Delta + c)E(r) = 0$ für $r > 0$ gilt.

$$\begin{aligned}
&\Delta E(r) = E''(r) + \frac{1}{r}E'(r)\\
&E'(r) = -\frac{c\sin(cr)}{4\pi r} - \frac{\cos(cr)}{4\pi r^2}\\
&\Rightarrow E''(r) = -\frac{c^2\cos(cr)}{4\pi r} + 2\frac{c\sin(cr)}{4\pi r^2} + 2\frac{\cos(cr)}{4\pi r^3}\\
&\Rightarrow E''(r) + \frac{2}{r}E'(r) = -c^2\frac{\cos(cr)}{4\pi r} = -c^2E(r)\\
&\Leftrightarrow (\Delta + c^2)E = 0
\end{aligned}$$

Dann zeigen wir $(LE)(\phi) = \phi(0)$ mit $L := \Delta + c^2$:

$$(LE)(\phi) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Omega_\epsilon} E \cdot L\phi\,dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Omega_\epsilon} E \cdot L\phi - LE \cdot \phi\,dx.$$

Es gilt

$$E \cdot L\phi - LE \cdot \phi = E \cdot (\Delta + c^2\phi) - (\Delta E + c^2E)\phi = E \cdot \Delta\phi - \Delta E \cdot \phi,$$

folglich ist

$$\begin{aligned}
(LE)(\phi) &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Omega_\epsilon} E \cdot \Delta\phi - \Delta E \cdot \phi\,dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial\Omega_\epsilon} E \cdot \partial_r\phi - \partial_r E \cdot \phi\,dS\\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial\Omega_\epsilon} -\partial_r E \cdot \phi\,dS.
\end{aligned}$$

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Betrachte die Summanden in $E'(r)$ getrennt:

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\sin(cr)}{r}\phi(r)\,dS = \epsilon \int_{\mathbb{S}^3} (\phi \cdot \sin \circ c) \circ \epsilon\, dS \overset{\epsilon \to 0}{\to} 0 \cdot 0 = 0$$

$$\int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\cos(cr)}{r^2}\phi(r)\,dS = \int_{\mathbb{S}^3} (\phi \cdot \cos \circ c) \circ \epsilon\, dS \overset{\epsilon \to 0}{\to} |\mathbb{S}^3|\phi(0) \cdot \cos(c \cdot 0) = |\mathbb{S}^3|\phi(0)$$

Daraus folgt

$$(LE)(\phi) = -\left(-\frac{c}{4\pi} \cdot 0 - \frac{1}{4\pi} \cdot 4\pi \cdot \phi(0)\right) = \phi(0).$$

Aufgabe 7.4.

Finden Sie eine Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung in $\mathbb{R}^n$, indem Sie

$$u_t = u_{xx}, \qquad u(0) = H \tag{1}$$

mit der Heavysidefunktion H betrachten.

Lösung 4

Betrachte zuerst $n = 1$. Mit dem Ansatz $u(t,x) = v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ folgt

$$\begin{aligned} & v'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot t^{-3/2} = v''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \cdot \frac{1}{t} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot v'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = -2 \cdot v''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \\ \Leftrightarrow\ & y \cdot v'(y) = -2 \cdot v''(y). \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung ist wieder mit Separation der Variablen lösbar:

$$yv'(y) = -2v''(y) \Leftrightarrow \int \frac{v''(y)}{v'(y)}\,dy = \int -\frac{y}{2}\,dy \Leftrightarrow \ln(v'(y)) = -\frac{y^2}{4} + C$$

$$\Leftrightarrow v'(y) = \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right)\exp(c) =: a\exp\left(-\frac{y^2}{4}\right) \overset{7.1}{\Leftarrow} v(y) = a\int_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right)\,dy,$$

das ist äquivalent zu

$$u(t,x) = a\int_{-\infty}^{x/\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{s^2}{4}\right)\,ds.$$

Es muss noch gelten $u(0,x) = H(x)$, das heißt $\lim_{t\to 0} u(t,x) = 0$ für $x < 0$ und $\lim_{t\to 0} u(t,x) = 1$ für $x > 0$. Es gilt

$$\lim_{t\to 0} u(t,x) = a \lim_{b\to -\infty} \int_{-\infty}^{b} \exp\left(-\frac{s^2}{4}\right)\,ds = 0$$

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

für $x < 0$ und

$$\lim_{t \to 0} u(t,x) = a \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{4}\right) ds = a\sqrt{4\pi}$$

für $x > 0$. Damit folgt $a = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, das heißt

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{x/\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{s^2}{4}\right) ds$$

löst (1). Damit löst $G(t,x) := \partial_x u(t,x)$ $G(0,\cdot) = \delta$ und $\partial_t G = \partial_x \partial_t u = \partial_x \partial_x^2 u = \partial_x^2 G$, das heißt

$$G(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

ist eine Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung in einer Dimension. Eine Fundamentallösung in höheren Dimensionen erhalten wir als Produkt von eindimensionalen Lösungen:

$$\begin{aligned}
\partial_1^2(f_1(t,x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(t,x_n)) &= (\partial_1^2 f_1(t,x_1)) \cdot f_2(t,x_2) \cdot \ldots \cdot f_n(t,x_n) \\
\partial_t(f_1(t,x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(t,x_n)) &= (\partial_t f_1(t,x_1)) \cdot f_2(t,x_2) \cdot \ldots \cdot f_n(t,x_n) + \ldots \\
&\quad + f_1(t,x_1) \cdot \ldots \cdot f_{n-1}(t,x_n) \cdot (\partial_t f_n(t,x_n)).
\end{aligned}$$

Es ist also

$$E(t,x) = \prod_{i=1}^{n} G(t,x_i) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

eine Fundamentallösung von $u_t = \Delta u$ auf $\mathbb{R}^n$.

Dieses Vortragsübungsblatt wird am

Dienstag, den 28.5.2019

besprochen.

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Höhere Analysis (SS 2019)

Vortragsübungsblatt 8

Aufgabe 8.1.

Geben Sie an, in welchen Punkte $z = x + iy$ die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind:

1. $f(z) = \mathrm{Re}(z)$
2. $f(z) = \exp(\sin(z))$

Aufgabe 8.2.

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f'(z_0) \neq 0$. Verifizieren Sie, dass die f entsprechende Abbildung von $\mathbb{R}^2$ dann in z_0 winkeltreu ist, das heißt: Die Jacobimatrix von $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)) := (\mathrm{Re}(f(x + iy), \mathrm{Im}(f(x + iy))$ ist in $(x_0, y_0) := (\mathrm{Re}(z_0), \mathrm{Im}(z_0))$ eine Drehstreckung:

$$\begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

für ein $r > 0$ und ein $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Aufgabe 8.3.

Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $\Delta u = 0$.

1. Zeigen Sie, dass u der Realteil einer zweimal komplex stetig differenzerbaren Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist, das heißt $\mathrm{Re}(f(x + iy)) = u(x, y)$.
2. Benutzen Sie a), um $\alpha \in \mathbb{R}$ so zu bestimmen, dass

   $$u(x, y) := 3x^2 + \alpha y^2 - 4xy + 3$$

   der Realteil einer holomorphen Funktion ist.
3. Benutzen Sie das Ergebnis aus b) und berechnen Sie die zu u konjugiert harmonische Funktion v, für die $v(0, 0) = 1$ gilt.

Aufgabe 8.4.

Zeigen Sie:

1. Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch, dann ist auch $g(z) := \overline{f(\overline{z})}$ analytisch.
2. Ist $f(x + iy) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ analytisch und $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, dann folgt $\Delta|f|^2 = 2||\nabla f||^2$.

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Lösung 1

1. $u(x,y) = x, v(x,y) = 0 \Rightarrow u_x(x,y) = 1 \neq 0 = v_y(x,y)$. Somit ist f für kein $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar.
2. Es ist $\sin(x+iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$. Damit folgt

$$e^{\sin(x+iy)} = e^{\sin(x)\cosh(y)}(\cos(\cos(x)\sinh(y)) + i\sin(\cos(x)\sinh(y)),$$

also

$$u(x,y) = e^{\sin(x)\cosh(y)}\cos(\cos(x)\sinh(y)),$$
$$v(x,y) = e^{\sin(x)\cosh(y)}\sin(\cos(x)\sinh(y)).$$

Unter Anwendung der Produkt- und Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} u_x(x,y) =& e^{\sin(x)\cosh(y)}(\sin(x)\sinh(y)\sin(\cos(x)\sinh(y))+ \\ & \cos(x)\cosh(y)\cos(\cos(x)\sinh(y)) = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) =& e^{\sin(x)\cosh(y)}(\sin(x)\sinh(y)\cos(\cos(x)\sinh(y))- \\ & \cos(x)\cosh(y)\sin(\cos(x)\sinh(y)) = -v_x(x,y), \end{aligned}$$

also ist f auf $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

Lösung 2

Weil f komplex differenzierbar in $z_0 = x_0 + iy_0$ ist, gilt

$$\begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & -v_x(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & u_x(x_0,y_0) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist $0 \neq f'(z_0) = a+ib \Rightarrow r := \sqrt{a^2+b^2} > 0$. Wegen $||(a/r, b/r)|| = 1$ existiert ein $\phi \in [0, 2\pi)$ mit $(a/r, b/r) = (\cos(\phi), \sin(\phi))$. Also ist

$$\begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} a/r & -b/r \\ b/r & a/r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

Lösung 3

1. Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $h(x,y) := (-u_y(x,y), u_x(x,y))^T$. Dann ist h stetig differenzierbar und es gilt $\mathrm{rot}(h) = (h_1)_y - (h_2)_x = -u_{yy} - u_{xx} = -\Delta u = 0$. Somit existiert ein Potential $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sodass

$$\nabla v = h \Leftrightarrow (v_x, v_y) = (-u_y, u_x) \tag{1}$$

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

gilt. Definiere $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Dann erfüllen u und v nach (1) die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen und somit ist f komplex differenzierbar. Außerdem gilt nach Konstruktion $\mathrm{Re}(f(x+iy)) = u(x,y)$.

2. Für $u(x,y) = 3x^2 + \alpha y^2 - 4xy + 3$ gilt $\Delta u(x,y) = 6 + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -3$.
3. Es muss gelten:

$$v_y(x,y) = (3x^2 - 3y^2 - 4xy + 3)_x = 6x - 4y \Rightarrow v(x,y) = 6xy - 2y^2 + C_1(x). \quad (2)$$

Außerdem

$$v_x(x,y) = -(-6y - 4x) = 6y + 4x \Rightarrow v(x,y) = 6xy + 2x^2 + C_2(y). \quad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt $v(x,y) = 6xy - 2y^2 + 2x^2 + C$. Mit $v(0,0) = 1$ folgt $v(x,y) = 6xy - 2y^2 + 2x^2 + 1$.

Lösung 4

1. Für $z \neq z_0$ gilt

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{\overline{f(\overline{z})} - \overline{f(\overline{z_0})}}{z - z_0} = \frac{\overline{f(\overline{z}) - f(\overline{z_0})}}{z - z_0} = \overline{\left(\frac{f(\overline{z}) - f(\overline{z_0})}{\overline{z - z_0}}\right)} = \overline{\left(\frac{f(\overline{z}) - f(\overline{z_0})}{\overline{z} - \overline{z_0}}\right)}$$

und damit auch

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\overline{z} \to \overline{z_0}} \overline{\left(\frac{f(\overline{z}) - f(\overline{z_0})}{\overline{z} - \overline{z_0}}\right)} = \overline{\lim_{\overline{z} \to \overline{z_0}} \left(\frac{f(\overline{z}) - f(\overline{z_0})}{\overline{z} - \overline{z_0}}\right)}$$

Also ist g analytisch mit $g'(z_0) = \overline{f'(\overline{z_0})}$.

2. Sei $f = u + iv$, dann ist $|f|^2 = u^2 + v^2$. Es ist $\left(u^2\right)_{xx} = (2uu_x)_x = 2(u_x)^2 + 2uu_{xx}$, analog $\left(u^2\right)_{yy} = 2(u_y)^2 + 2uu_{yy}$. Daraus folgt

$$\Delta u^2 = 2(u_x)^2 + 2(u_y)^2 + 2u(u_{xx} + u_{yy}) \overset{\Delta u = 0}{=} 2(u_x)^2 + 2(u_y)^2. \quad (4)$$

Analog zeigt man $\Delta v^2 = 2(v_x)^2 + 2(v_y)^2$. Es folgt

$$\Delta|f|^2 = 2(u_x)^2 + 2(u_y)^2 + 2(v_x)^2 + 2(v_y)^2 = 2\left(|u_x + iv_x|^2 + |u_y + iv_y|^2\right) = 2||\nabla f||^2.$$

Dieses Vortragsübungsblatt wird am
Dienstag, den 04.06.2019
besprochen.

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Höhere Analysis (SS 2019)

Vortragsübungsblatt 9

Aufgabe 9.1.

Berechnen Sie folgende Integrale durch Parametrisierung der Wege γ.

1. $\displaystyle\int_\gamma |z|\ dz$
   i) γ ist das Geradenstück von $-i$ nach i
   ii) γ ist der Halbkreis von $-i$ nach i gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen
2. $\displaystyle\int_\gamma |z|^2\ dz$
   i) γ ist die Verbindung durch Geradenstücke von 0 über 1 nach $1+i$
   ii) γ ist die Verbindung durch Geradenstücke von 0 über i nach $1+i$
3. $\displaystyle\int_\gamma |z|\bar{z}\ dz,$
   $\gamma = \{x+iy\ :\ x^2+y^2=1, y\geq 0)\} \cup \{x+iy\ :\ y=0, |x|\leq 1\}$ gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen

Aufgabe 9.2.

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen nicht holomorph sind, indem Sie $\oint_{|z|=1} f(z)\,dz$ berechen.

1. $f(z) = \mathrm{Re}(z)$
2. $f(z) = \bar{z}$

Aufgabe 9.3.

Zeigen Sie: Für $k, m \in \mathbb{N}$ und $k \leq m$ gilt

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin(z^m)}{z^k}\,dz = 0.$$

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Aufgabe 9.4.

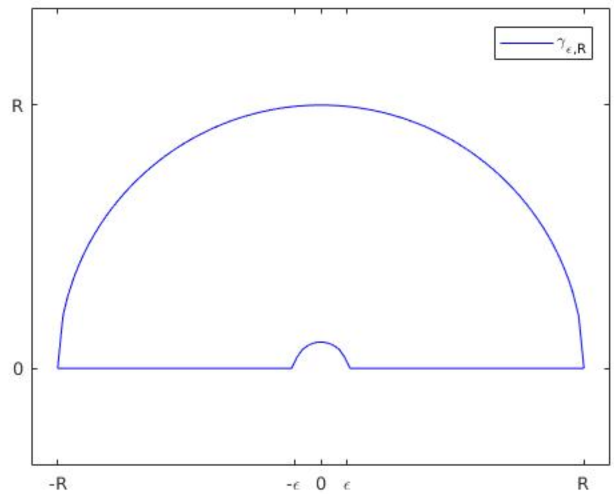
Zeigen Sie: Gilt $f \in L^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$,

$$\lim_{R\to\infty} R \max_{|z|=R} |f(z)| = 0 \text{ und } \exists_{\epsilon>0} : f|_{B_\epsilon(0)} \text{ beschränkt,}$$

so folgt

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \oint_{\gamma_{\epsilon,R}} f(z)\, dz$$

mit $\gamma_{\epsilon,R}$ wie auf dem folgenden Bild:



Später werden wir diese Aussage verwenden und den Residuensatz auf die rechte Seite anwenden, um Integrale über die reelle Achse sehr einfach berechnen zu können.

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Lösung 1

1. i) γ wird parametrisiert durch $s(t) = t \cdot i,\ -1 \leq t \leq 1$. Damit ist

$$\int_\gamma |z|\ dz = i \cdot \int_{-1}^{1} |t|\ dt = i.$$

ii) γ wird parametrisiert durch $s(t) = e^{it},\ -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. Damit ist

$$\int_\gamma |z|\ dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \cdot ie^{it}\ dt = i \cdot \left[-ie^{it}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = i \cdot (1+1) = 2i.$$

2. i) Wie in 1. ii) werden zwei Parametrisierungen gewählt: $s_1(t) = t, s_2(t) = 1 + it$, $0 \leq t \leq 1$, dann ist

$$\int_\gamma |z|^2\ dz = \int_0^1 t^2\ dt + \int_0^1 (1+t^2) \cdot i\ dt = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}i$$

ii) Analog beim Streckenzug 2 mit den Parametrisierungen $s_1(t) = it, s_2(t) = i + t$, $0 \leq t \leq 1$. Daraus folgt

$$\int_\gamma |z|^2\ dz = \int_0^1 t^2 \cdot i\ dt + \int_0^1 (1+t^2)\ dt = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}i$$

3. Es seien $s_1(t) = t,\ -1 \leq t \leq 1$ und $s_2(t) = e^{it},\ 0 \leq t \leq \pi$. Dann ist

$$\int_\gamma |z|\bar{z}\ dz = \int_{-1}^{1} |t|t \cdot 1\ dt + \int_0^\pi |e^{it}|e^{-it} \cdot ie^{it}\ dt = 0 + \int_0^\pi i\ dt = \pi i.$$

Lösung 2

Die Parametrisierung von $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ist $\gamma(\phi) = e^{i\phi}$.

1. Somit ist

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=1} \mathrm{Re}(z)\, dz &= \int_0^{2\pi} \cos(\phi) ie^{i\phi}\, d\phi \\
&= i\left(\int_0^{2\pi} \cos^2(\phi)\, d\phi + i\int_0^{2\pi} \cos(\phi)\sin(\phi)\, d\phi\right) \\
&= i\int_0^{2\pi} \cos^2(\phi)\, d\phi \\
&= i\pi \neq 0.
\end{aligned}$$

Wäre f holomorph, müsste das Integral über einen geschlossenen Pfad verschwinden.

2. Analog gilt

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=1} \bar{z}\, dz &= \int_0^{2\pi} e^{-i\phi} i e^{i\phi}\, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} i\, d\phi \\ &= 2\pi i \neq 0.\end{aligned}$$

Lösung 3

Es ist

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Damit folgt

$$\frac{\sin(z^m)}{z^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2mn+m-k}$$

und somit

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=1} \frac{\sin(z^2)}{z}\, dz &= \oint_{|z|=1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2mn+m-k}\, dz \\ &\overset{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{|z|=1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2mn+m-k}\, dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \oint_{|z|=1} z^{2mn+m-k}\, dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot 0 \\ &= 0,\end{aligned}$$

weil $z^{2mn+m-k}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $m > k$ holomorph ist. Gleichung * gilt, weil

$$
\begin{aligned}
\left| \oint_{|z|=1} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2mn+m-k} \right| &\leq \oint_{|z|=1} \sum_{n=1}^{N} \frac{|z|^{2mn+m-k}}{(2n+1)!}\, dz \\
&= \oint_{|z|=1} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n+1)!}\, dz \\
&\leq \oint_{|z|=1} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!}\, dz \\
&\leq \oint_{|z|=1} e\, dz \\
&= 2\pi e < \infty.
\end{aligned}
$$

Das heißt $f(z) \equiv e$ ist eine integrierbare Majorante für $f_N(z) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2mn+m-k}$.

Lösung 4

Es gilt

$$\oint_{\gamma_{\epsilon,R}} f(z)\, dz = \int_{\gamma_R} f(z)\, dz + \int_{[-R,R]/[-\epsilon,\epsilon]} f(z)\, dz + \int_{\gamma_\epsilon} f(z)\, dz$$

und

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)\, dz \right| \leq \pi R \max_{|z|=R} |f(z)| \overset{R \to \infty}{\to} 0.$$

Außerdem ist

$$\left| \int_{\gamma_\epsilon} f(z)\, dz \right| \leq \pi \epsilon \max_{|z|=\epsilon} |f(z)| \leq C\pi\epsilon \overset{\epsilon \to 0}{\to} 0.$$

Somit folgt

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon \to 0} \oint_{\gamma_{\epsilon,R}} f(z)\, dz = \lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{[-R,R]/[-\epsilon,\epsilon]} f(z)\, dz = \int_{\mathbb{R}} f(z)\, dz = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx.$$

Dieses Vortragsübungsblatt wird am

Dienstag, den 18.06.2019

besprochen.

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Höhere Analysis (SS 2019)

Vortragsübungsblatt 10

Aufgabe 10.1.

Berechnen Sie folgende Integrale mit den Formeln, die aus der Cauchyschen Integralformel folgen.

1. $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z-1)^3(z^2+1)}\,dz$
2. $\displaystyle\oint_{|z|=1/2} \frac{1+z^4}{z^3-z^2}\,dz$
3. $\displaystyle\oint_{\gamma} \frac{e^z}{(2z-\pi i)^2}\,dz$

   Dabei ist γ ein beliebiger geschlossener Pfad.

Aufgabe 10.2.

Zeigen Sie: Das Bild einer ganzen, nicht konstanten Funktion ist dicht in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 10.3.

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $u \in \{u \in C^2(\Omega) : \Delta u = 0, \forall x \in \Omega\ 0 < u^2(x) \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall $v := \ln(u)$ die Relation $\Delta v \leq 0$ erfüllt.

Aufgabe 10.4.

Zeigen Sie, dass der Konvergenzsatz von Weierstraß nicht im Reellen gilt, indem Sie Funktionen f_n und f finden, für die gilt:

1. $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, aber $f_n \to f$ gilt nicht.
2. $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, aber f ist nicht differenzierbar.

Aufgabe 10.5.

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f : B_r(z_0)\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter gelte
$\exists C > 0,\ \exists \epsilon \in]-\infty, 1[:\ |f(z)| \leq C|z-z_0|^{-\epsilon}\ \forall z \in B_r(z_0)\backslash\{z_0\}$. Man zeige, dass f in den Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ fortgesetzt werden kann.

Aufgabe 10.6.

Sei $J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass

$$\exp(Jt) = I \cdot \cos(t) + J \cdot \sin(t)$$

gilt. Zeigen Sie insbesondere, dass die entsprechenden Reihen in $\mathbb{C}^{2x2}$ konvergieren. Diese Formel ist das Analogon in $\mathbb{R}^2$ zu der Eulerschen Identität $\exp(it) = \cos(t) + i\sin(t)$ in $\mathbb{C}$.

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Lösung 1

Es ist

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\ dz = \frac{2\pi i}{k!} f^{(k)}(a)$$

für jede analytische Funktion f.

1. Wähle $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, dann gilt

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z-1)^3(z^2+1)}\ dz = \oint_{|z-1|=1} \frac{f(z)}{(z-1)^3}\ dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(1).$$

   Es ist

$$f''(z) = \left(\frac{-2z}{(z^2+1)^2}\right)' = \frac{-2(z^2+1)^2 + 8z^2(z^2+1)}{(z^2+1)^4}.$$

   Es folgt

$$f''(1) = \frac{1}{2}$$

   und

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z-1)^3(z^2+1)}\ dz = \frac{\pi i}{2}.$$

2. Wähle $f(z) = \frac{1+z^4}{z-1}$, dann gilt

$$\oint_{|z|=1/2} \frac{1+z^4}{z^3-z^2}\ dz = \oint_{|z|=1/2} \frac{f(z)}{z^2}\ dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(0).$$

   Es ist

$$f'(z) = \frac{4z^3(z-1) - (1+z)}{(z-1)^2} \Rightarrow f'(0) = -1$$

   und somit

$$\oint_{|z|=1/2} \frac{1+z^4}{z^3-z^2}\ dz = -2\pi i$$

3. Fall 1: γ umrundet nicht den Pol $\Rightarrow \oint_\gamma \frac{e^z}{(2z-\pi i)^2}\ dz = 0$.
   Fall 2: γ umrundet den Pol $0 \neq n$-mal gegen den Uhrzeigersinn. Es gilt

$$\frac{e^z}{(2z-\pi i)^2} = \frac{e^z}{4} \frac{1}{(z-\pi i/2)^2},$$

   wähle also $f(z) := \frac{e^z}{4}$. Dann folgt

$$\oint_\gamma \frac{e^z}{(2z-\pi i)^2}\ dz = n \cdot \frac{2\pi i}{1!} f'\left(\frac{\pi i}{2}\right) = n \cdot \frac{2\pi i}{4} e^{\pi i/2} = n \cdot \frac{\pi i^2}{2} = -\frac{n\pi}{2}.$$

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Lösung 2

Es ist

$$J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\exp(Jt) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(Jt)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} J^{2k} t^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} J^{2k+1} t^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} I t^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} J t^{2k+1} \\ &= I \cdot \cos(t) + J \cdot \sin(t).\end{aligned}$$

Lösung 3

Sei f ganz und nicht konstant. Es gilt $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C} \Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{C}\ \exists z_n \in f(\mathbb{C}) : z_n \to z$. Gegenannahme: $f(\mathbb{C})$ ist nicht dicht in $\mathbb{C}$. Daraus folgt $\exists a \in \mathbb{C} : g(z) := \frac{1}{f(z)-a}$ ist beschränkt. Außerdem ist g holomorph (nachrechnen), damit folgt mit dem Satz von Liouville:

$$g \text{ ist konstant } \Leftrightarrow \frac{1}{f(z)-a} \equiv c \Leftrightarrow 1 \equiv cf(z) - ca \Leftrightarrow f(z) \equiv \frac{1+ca}{c} \Leftrightarrow f \text{ ist konstant}$$

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass f nicht konstant ist. Dementsprechend war die Gegenannahme falsch, es gilt $f(\mathbb{C})$ ist dicht in $\mathbb{C}$.

Lösung 4

Es gilt

$$\partial_j v = \frac{\partial_j u}{u} \Rightarrow \partial_j^2 v = -\frac{(\partial_j u)^2}{u^2} + \frac{\partial_j^2 u}{u} \Rightarrow \Delta v = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 v = -\frac{|\nabla u|^2}{u^2} + \frac{\Delta u}{u} = -\frac{|\nabla u|^2}{u^2} \leq 0.$$

Lösung 5

1. Sei $f_n(x) := \frac{\sin(nx)}{n}$, daraus folgt $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \to 0$. Das heißt f_n konvergiert gleichmäßig gegen $f(x) \equiv 0$. Es gilt jedoch $f_n'(x) = \cos(nx)$, diese Funktionenfolge konvergiert nicht gegen die Nullfunktion

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

2. Sei $f(x) = |x|$, dann lässt sich f auf $[-1, 1]$ als Fourierreihe schreiben: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$. Wähle $f_N := \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nx)$, dann konvergiert f_N gleichmäßig gegen f, f_N ist holomorph, aber f ist in $x = 0$ nicht differenzierbar.

   Ein weiteres Beispiel ist $f_N(x) := \sum_{n=0}^{N} b^n \cos(a^n \pi x)$ mit $0 < b < 1$ und $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, $a \in \mathbb{Z}$ ungerade. Dann ist f_N holomorph und konvergiert gegen ein f, das überall stetig und nirgens differenzierbar ist (Weierstraßscher Dämon)

Lösung 6

Fallunterscheidung zwischen $\epsilon < 0$ und $0 \leq \epsilon < 1$:

1. Sei $\epsilon < 0$, dann gilt
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = 0.$$
   Somit ist f in einer punktierten Umgebung von z_0 beschränkt und holomorph. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz lässt sich f zu einer holomorphen Funktion $\tilde{f} : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ fortsetzen
2. Sei $0 \leq \epsilon < 1$, betrachte $g(z) := f(z)(z - z_0)$ für $z \neq z_0$ und $g(z) = 0$ sonst. Dann gilt
$$\lim_{z \to z_0} g(z) = 0,$$
   also lässt sich g nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz holomorph fortsetzen. Insbesondere lässt sich g als Potenzreihe darstellen:
$$g(z) = \sum_{n=0} a_n (z - z_0)^n.$$
   Wegen $g(z_0) = 0$ folgt $a_0 = 0$ und somit
$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (z - z_0)^{n+1}$$
$$\Rightarrow f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (z - z_0)^n \text{ auf } B_r(z_0) \backslash \{z_0\}.$$
   Außerdem ist die Potenzreihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (z - z_0)^n$$
   holomorph auf $B_r(z_0)$, also ist sie eine holomorphe Fortsetzung von f.

Dieses Vortragsübungsblatt wird am
Dienstag, den 25.06.2019
besprochen.

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Höhere Analysis (SS 2019)

Vortragsübungsblatt 11

Aufgabe 11.1.

Beweisen Sie das Schwartzsche Lemma: Es bezeichne $B := B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe. Sei $f \colon B \to B$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$. Dann gilt $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in B$ und $|f'(0)| \leq 1$.
Falls in einem Punkt $z_0 \in B, z_0 \neq 0$, zusätzlich die Gleichheit $|f(z_0)| = |z_0|$ besteht oder $|f'(0)| = 1$ gilt, so ist f eine Drehung, d.h. $f(z) = e^{i\lambda} \cdot z$ für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 11.2.

Folgern Sie aus dem Schwartzschen Lemma: Die biholomorphen Abbildungen des Einheitskreises in sich sind genau die Möbius-Transformationen

$$g(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}$$

mit $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$.

Aufgabe 11.3.

Zeigen Sie: Sei f holomorph, D beschränkt, $|f|$ stetig fortsetzbar auf $\bar{D}$ und $|f|$ konstant auf ∂D. Dann ist f konstant oder $\exists z_0 \in \bar{D} : f(z_0) = 0$.

Aufgabe 11.4.

Geben Sie eine Laurentreihe für die folgenden Funktionen an:

1. $f(z) = \frac{\exp(z)}{z}$ auf $0 < |z| < \infty$
2. $f(z) = \exp\left(z^{-1}\right)$ auf $0 < |z| < \infty$
3. $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$ auf $0 < |z-1| < 1$, $1 < |z-1| < 2$ und $2 < |z-1| < \infty$

Aufgabe 11.5.

Sei D offen, beschränkt, zusammenhängend und seien u, v holomorph mit $u = v$ auf ∂D. Zeigen Sie: Es gilt $u = v$ auf D. Zeigen Sie, dass die Aussage auch für $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch gilt. Insbesondere ist die Lösung des Poissonproblems $\Delta u = 0$ in D,
$u = g$ auf ∂D somit eindeutig.

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Lösung 1

f ist holomorph, also auch analytisch. Das heißt

$$\exists a_n \in \mathbb{C}: \; f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ auf } B.$$

Es gilt $f(0) = 0$, daraus folgt $a_0 = 0$. Insbesondere

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \Rightarrow \frac{f(z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n.$$

Per Definition ist

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z},$$

folglich ist

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & \text{für } z \neq 0 \\ f'(z), & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

holomorph und besitzt die Taylorentwicklung $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n$ auf B. Nach dem Maximumsprinzip nimmt g sein Maximum nicht auf $B_r(0), 0 < r < 1$ an. Gleichzeitig nimmt g als stetige Funktion sein Maximum auf der kompakten Menge $\overline{B_r(0)}$ an. Folglich wird das Maximum auf $\partial B_r(0)$ angenommen. Dort gilt

$$|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| = \frac{|f(z)|}{r} \overset{f(z)\in B}{\leq} \frac{1}{r}.$$

Diese Ungleichung gilt auch für $r \to 1$:

$$|g(z)| \leq 1 \Leftrightarrow |f'(0)| \leq 1 \wedge \forall z \in B \backslash \{0\} : |f(z)| \leq |z|.$$

Mit $f(0) = 0$ gilt $|f(z)| \leq |z| \; \forall z \in B$. Falls $|f'(0)| = 1$ oder $\exists z_0 \in B : |f(z_0)| = |z_0|$, dann gilt $\exists z_0 \in B : |g(z_0)| = 1$. Damit nimmt g sein Maximum auf der offenen Menge B an und ist nach dem Maximumsprinzip konstant. Es gilt also $g(z) = c$ mit $|c| = 1$, das heißt $f(z) = c \cdot z$. Es gilt

$$|c| = 1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : c = e^{i\lambda} \Rightarrow f(z) = e^{i\lambda} \cdot z.$$

Lösung 2

Vor dem Beweis müssen wir einige Aussagen über Möbiustransformationen wiederholen: Sei $g(z) = \frac{az+b}{bz+\bar{a}}$ mit $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$. Dann gilt $g(B) = B$, g ist biholomorph und g^{-1} ist wieder eine Möbiustransformation der Form $\frac{az+b}{bz+\bar{a}}$.

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Sei nun $F : B \to B$ eine beliebige biholomorphe Funktion, insbesondere gilt $F(0) \in B$. Wähle nun

$$g(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} \text{ mit } g(F(0)) = 0 \Leftrightarrow b = -aF(0) \text{ und } a = \sqrt{\frac{1}{1-F(0)\overline{F(0)}}} \Rightarrow a\bar{a} - b\bar{b} = 1,$$

dann ist $f := g \circ F : B \to B$, weil $f(B) = g(F(B)) = g(B) = B$. Außerdem ist f biholomorph als Verkettung biholomorpher Funktionen und es gilt $f(0) = g(F(0)) = 0$. Nach dem Schwartzschen Lemma gilt $|\tilde{f}'(0)| \leq 1$ für die Umkehrfunktion $\tilde{f} := f^{-1}$. Mit der Kettenregel gilt außerdem

$$\begin{aligned} z = \tilde{f}(f(z)) &\Rightarrow 1 = \tilde{f}'(f(z)) \cdot f'(z) \\ &\Rightarrow 1 = \tilde{f}'(f(0)) \cdot f'(0) = \tilde{f}'(0) \cdot f'(0) \\ &\Rightarrow |f'(0)| = \frac{1}{|\tilde{f}'(0)|} \geq 1. \end{aligned}$$

Nach dem Schwartzschen Lemma gilt $|f'(0)| \leq 1$, damit ist $|f'(0)| = 1$. Aus dem Schwartzschen Lemma folgt außerdem, dass

$$f(z) = e^{i\lambda}z = \frac{e^{i\lambda/2}z}{e^{-i\lambda/2}} = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$$

gilt mit $a = e^{i\lambda/2}$ und $b = 0$.

Lösung 3

Fallunterscheidung:
1. f besitzt eine Nullstelle in $\bar{D}$, dann sind wir fertig.
2. f besitzt keine Nullstelle in $\bar{D}$, dann ist zu zeigen: $f = const.$
Es ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $|f| : \bar{D} \to \mathbb{C}$ stetig, daraus folgt $f : \bar{D} \to \mathbb{C}$ stetig. Nach dem Maximumsprinzip

$$\exists z_1 \in \partial D : |f(z)| \leq |f(z_1)| \, \forall z \in \bar{D}. \tag{1}$$

f hat nach keine Nullstelle in ∂D, daraus folgt

$$0 < |f(z)| \leq |f(z_1)| \, \forall z \in \bar{D} \Rightarrow \frac{1}{|f(z_1)|} \leq \frac{1}{|f(z)|} \, \forall z \in \bar{D} \tag{2}$$

und $1/f$ holomorph auf D, sowie $1/f$ stetig auf $\bar{D}$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists z_2 \in \partial D : \left|\frac{1}{f(z)}\right| \leq \left|\frac{1}{f(z_2)}\right| \, \forall z \in \bar{D} \\ &\overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{|f(z_1)|} \leq \frac{1}{|f(z)|} \leq \frac{1}{|f(z_2)|} \, \forall z \in \bar{D} \end{aligned} \tag{3}$$

Nach Voraussetzung gilt $|f| = const.$ auf ∂D, daraus folgt

$$\begin{aligned}
&|f(z_1)| = |f(z_2)| \\
&\overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{1}{|f|} = const. \text{ auf } \bar{D} \\
&\Rightarrow |f| = const. \text{ auf } \bar{D} \\
&\Rightarrow \text{in (1) gilt Gleichheit.}
\end{aligned}$$

Mit dem Maximumsprinzip angewendet auf f gilt, dass f konstant ist.

Lösung 4

-Betrachte $w := u - v$, dann gilt $0 \leq |w|$ auf D und wegen des Maximumsprinzips $|w| \leq \max_{x \in \partial D} |w(x)| = 0$. Damit gilt $w = 0$ auf D, das ist äquivalent zu $u = v$.

-Für harmonische Funktionen gilt das Mittelwertprinzip, das folgt direkt aus dem Mittelwertprinzip für holomorphe Funktionen: Sei $\Delta u = 0$, dann gibt es ein v mit $f := u+iv$ holomorph.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow f(x) = \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} f(y)\, dy \\
&\Leftrightarrow u(x) + iv(x) = \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} u(y)\, dy + i \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} v(y)\, dy \\
&\Rightarrow u(x) = \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} u(y)\, dy.
\end{aligned}$$

-Daraus folgt das starke Maximumsprinzip: Sei u harmonisch und $x_0 \in D$ mit $u(x_0) = \max_{x \in \bar{D}} u(x) =: M$. Für
$0 < r < dist(x_0, \partial D)$ gilt dann mit der Mittelwertformel

$$M = u(x_0) = \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} u(y)\, dy \leq \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} M\, dy = \frac{M}{|B_r(x_0)|} |B_r(x_0)| = M$$

$\Rightarrow u(y) = M \; \forall y \in B_r(x_0)$.

Da D zusammenhängend ist, gilt $u(y) = M \; \forall y \in D$.

-Aus dem starken Maximumsprinzip für harmonische Funktionen folgt das schwache Maximumsprinzip: Sei $u \neq$ konstant. Die Annahme $\exists x_0 : u(x_0) = \max_{x \in \bar{D}} u(x)$ führt auf einen Widerspruch zum starken Maximumsprinzip, es folgt

$$\max_{x \in \bar{D}} u(x) = \max_{x \in \partial D} u(x).$$

-Seien u, v auf D harmonische Funktionen mit $u = g = v$ auf ∂D. Dann gilt für $w := u - v$

$$0 \leq |w| \leq \max_{x \in \partial D} |w| = 0 \Rightarrow w = 0 \text{ auf } D \Leftrightarrow u = v \text{ auf } D \qquad \square$$

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Lösung 5

1. Es gilt
$$\frac{\exp(z)}{z} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$$
für $0 < |z| < \infty$.

2. Es gilt
$$\exp(z^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{z^n}{|n|!}$$
für $0 < |z| < \infty$.

3. Vorwissen:
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \text{ für } 0 < |q| < 1.$$
Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch:
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3} \Leftrightarrow 1 = A(z-3) + B(z-2) \\
&\Rightarrow 1 = A \cdot 0 + B \cdot 1,\ 1 = A \cdot (-1) + B \cdot 0 \Leftrightarrow A = -1,\ B = 1 \\
&\Rightarrow \frac{1}{(z-2)(z-3)} = -\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3}
\end{aligned}$$
3.1 Es gilt
$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-2} &= \frac{1}{-1+z-1} = \frac{1}{-1} \cdot \frac{1}{1-(z-1)} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n, \qquad (4) \\
\frac{1}{z-3} &= \frac{1}{-2+z-1} = \frac{1}{-2} \frac{1}{1-(z-1)/2} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (z-1)^n \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (z-1)^n. \qquad (5)
\end{aligned}$$
Dabei konvergiert (4) für $|z-1| < 1$ und (5) für $\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-1| < 2$, also gilt für $|z-1| < 1$
$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-2)(z-3)} &= -\left(-\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n\right) + \left(-\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (z-1)^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) (z-1)^n.
\end{aligned}$$

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Das ist genau die Taylorreihe von $z \mapsto \frac{1}{(z-2)(z-3)}$ in $z = 1$.

3.2 Es gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z-2} &= \frac{1}{-1+z-1} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1-1/(z-1)} \\
&= \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^{-(n+1)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (z-1)^{-n}, \qquad (6) \\
\frac{1}{z-3} &= \frac{1}{-2+z-1} = \frac{1}{z-1} \frac{1}{1-2/(z-1)} \\
&= \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (z-1)^{-(n+1)} \qquad (7) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} (z-1)^{-n}.
\end{aligned}
$$

Dabei konvergiert (6) für $\left|\frac{1}{z-1}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-1| > 1$ und (7) für $\left|\frac{2}{z-1}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-1| > 2$, also gilt für $|z-1| > 2$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(z-2)(z-3)} &= -\left(\sum_{n=1}^{\infty} (z-1)^{-n}\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} (z-1)^{-n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{n-1} - 1\right) (z-1)^{-n}.
\end{aligned}
$$

Die Laurentreihe besteht auf $|z-1| > 2$ nur aus dem Hauptteil.

3.3 Kombiniert man Formel (5) aus Aufgabenteil 3.1 und Formel (6) aus Aufgabenteil 3.2, erhält man für $1 < |z-1| < 2$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(z-2)(z-3)} &= -\left(\sum_{n=1}^{\infty} (z-1)^{-n}\right) + \left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (z-1)^n\right) \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} (z-1)^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (z-1)^n
\end{aligned}
$$

Dieses Vortragsübungsblatt wird am
Dienstag, den 02.07.2019
besprochen.

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Höhere Analysis (SS 2019)

Vortragsübungsblatt 12

Aufgabe 12.1.

Ermitteln Sie Lage und Art der Singularitäten der folgenden Funktionen. Geben Sie außerdem die Laurentreihe von f auf $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ an.

1. $f(z) = \cos\left(\frac{1}{z}\right)$
2. $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$
3. $f(z) = \frac{\exp(z^2)}{z^3}$
4. $f(z) = \frac{1}{z(2-z)}$

Aufgabe 12.2.

Zeigen Sie, dass der Satz von Taylor aus dem Laurentschen Entwicklungssatz folgt. Das heißt: Sei $a_n := f^{(n)}(a)/n!$ und $r := \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{-1/n}$, dann folgt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

auf $D_r(a)$ für eine holomorphe Funktion f.

Aufgabe 12.3.

Zeigen Sie: Sei $\epsilon > 0$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

eine auf $D_{1+\epsilon}(0)$ konvergierenden Laurentreihe und sei $g(t) := f(e^{it})$. Dann folgt

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \text{ mit } a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}\,dt.$$

Das heißt die Fourierreihendarstellung von g folgt aus dem Laurentschen Darstellungssatz.

Aufgabe 12.4.

Bestimmen Sie die Laurentreihe zu $\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$.

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Lösung 1

1. f hat eine wesentliche Singularität in $z = 0$, da

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1/z)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{-2n}.$$

gilt. Das heißt der Hauptteil der Laurentreihe bricht nicht ab. Diese Reihe konvergiert für $|z| > 0$.

2. Es gilt

$$\frac{\sin(z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{z(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{6} \pm ...$$

für alle $z \neq 0$, insbesondere $\lim_{z\to 1} f(z) = 1$. Dementsprechend hat f in $z = 1$ eine hebbare Singularität.

3. Es gilt

$$\frac{\exp(z^2)}{z^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2)^n}{z^3 n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n-3} = z^{-3} + z^{-1} + \frac{z}{2} + ...$$

für $z \neq 0$, f hat also eine Polstelle dritter Ordnung in $z = 0$.

4. Man könnte eine Partialbruchzerlegung machen und die geometrische Reihe verwenden wie auf dem letzten Blatt, wir nutzen jedoch die Formel aus der Vorlesung: Es gilt

$$\frac{1}{z(2-z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{z(2-z)z^{n+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{(2-z)z^{n+2}}\, dz.$$

Der Integrand hat für $n \leq -2$ keine Polstellen in $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$, deshalb ist $a_n = 0$. Für $n > -2$ gilt mit der Cauchyschen Integralformel

$$a_n = \frac{1}{(n+1)!} g^{(n+1)}(0) = \frac{1}{(n+1)!} \lim_{z\to 0} \frac{(n+1)!}{(2-z)^{n+2}} = \frac{1}{2^{n+2}}, \tag{1}$$

mit $g(z) = \frac{1}{2-z}$, also

$$\frac{1}{z(2-z)} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+2}} = \frac{1}{2z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{8} + ...$$

für $0 < |z| < 2$. Also hat f einen Pol erster Ordnung in $z = 0$.

Bemerkung: Die Formel (1) folgt direkt aus

$$g^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz.$$

Damit ist nämlich

$$\frac{1}{(n+1)!} g^{(n+1)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{g(z)}{(z-0)^{n+2}}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{(2-z)z^{n+2}}\, dz = a_n.$$

Lösung 2

Nach dem Laurentschen Entwicklungssatz gilt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

auf $D_{0,r}(a)$. Dabei lassen sich die Koeffizienten a_n durch

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz$$

berechnen mit $\gamma = \partial D_\tau(a)$ und $0 < \tau < r$. Für $n < 0$ gilt $a_n = 0$, weil der Integrand holomorph ist. Für $n \geq 0$ gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz.$$

Somit folgt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n =: g(z)$$

auf $D_{0,r}(a)$. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass die Gleichheit in $z = a$ gilt.

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \\ &= \frac{f^{(0)}(a)}{0!} (z-a)^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \\ &= f(a) + \mathcal{O}(z-a) \\ \Rightarrow g(a) &= f(a) + 0. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

auf $D_r(a)$, die Aussage ist bewiesen.

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Lösung 3

Es gilt

$$g(t) = f(e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (e^{it})^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int},$$

zu zeigen ist nur noch die Formel für a_n. Nach dem Laurentschen Entwicklungssatz gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D_1(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \, dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{e^{i(n+1)t}} i e^{it} \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} \, dt. \end{aligned}$$

Lösung 4

Betrachte zuerst

$$g(z) := \frac{z}{e^z - 1} \Rightarrow \lim_{z \to 1} g(z) = 1. \tag{2}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \frac{2i(e^{iz} + e^{-iz})}{2(e^{iz} - e^{-iz})} = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} = i + \frac{2i}{e^{2iz-1}} \\ \Rightarrow z \cot(z) = iz + g(2iz). \end{aligned} \tag{3}$$

Außerdem gilt

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!} z^\nu \tag{4}$$

mit den Bernoulli-Zahlen B_ν. Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{e^z - 1}{z} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^n}{zn!} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \\ \Rightarrow 1 &= \frac{z}{e^z - 1} \frac{e^z - 1}{z} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!} z^\nu \right) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \right) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{n} \frac{B_\mu}{\mu!} \frac{1}{(n+1-\mu)!} \right) z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left(\sum_{\mu=0}^{n} B_\mu \binom{n+1}{\mu} \right) z^n \\ \Rightarrow \sum_{\mu=0}^{n} B_\mu \binom{n+1}{\mu} &= 0 \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{\mu=0}^{n-1} B_\mu \binom{n+1}{\mu} \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Das ist gerade die rekursive Formel für die Bernoulli-Zahlen B_n, insbesondere gilt $B_0 = 1$ nach (2) und somit $B_1 = -\frac{1}{2}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} z\cot(z) &\overset{(3)}{=} iz + g(2iz) \overset{(4)}{=} iz + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}(2iz)^n = 1 + \left(i + \frac{B_1}{1!}2i\right) z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!}(2iz)^n \\ &= \sum_{n\neq 1} \frac{B_n}{n!}(2iz)^n. \end{aligned}$$

Da $z \mapsto z\cot(z)$ gerade ist, folgt $B_{2n+1} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} z\cot(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} 2^{2n} i^{2n} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \\ \Leftrightarrow \cot(z) &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}. \end{aligned}$$

Dieses Vortragsübungsblatt wird am

Dienstag, den 09.07.2019

besprochen.

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik
und Modellierung

Höhere Analysis (SS 2019)

Vortragsübungsblatt 13

Aufgabe 13.1.

Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}} f(z)\,dz$ und $\int_0^{2\pi} g(z)\,dz$ für

1. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + z^{-2}}$
2. $g(z) = \exp(\exp(iz))$
3. $f(z) = \dfrac{\cos(z)}{1+z^2}$
4. $g(z) = \dfrac{1}{5 + 4\sin(z)}$

Aufgabe 13.2.

Nutzen Sie den Satz von Rouché, um $\int_{\partial D_1(0)} f(z)\,dz$ zu berechnen für

1. $f(z) = \tan(z)$
2. $f(z) = \cot(z)$

Aufgabe 13.3.

Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+t^3}\,dt$, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+t^5}\,dt$ und damit $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+t^n}\,dt$ $\forall n \in 2\mathbb{N} - 1$.

Aufgabe 13.4.

Berechen Sie den Chauchyschen Hauptwert $H\int_{\mathbb{R}} f(z)\,dz$ für

1. $f(z) = \tan(z)$
2. $f(z) = \frac{1}{1+z^3}$

Lösung 1

1. Es gilt

$$\frac{1}{x^{-2} + x^2} = \frac{x^2}{1+x^4}$$

für $x \neq 0$. Der Nennergrad ist also um 2 größer als der Zählergrad und es gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + x^{-2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R \cup [-R,R]} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

mit $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$. Außerdem gilt für $n \in \{1,2,3,4\}$ $1 + x^4 = 0 \Leftrightarrow x = \exp(i(n\pi/2 - \pi/4)) =: x_n$. Mit dem Residuensatz folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + x^{-2}} \,\mathrm{d}x = 2\pi i(\operatorname{Res}(f, x_1) + \operatorname{Res}(f, x_2))$$

mit $\tilde{f}(x) := x^2/(1+x^4)$. Im Folgenden wird mit der Formel

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{f(z)(z - z_0)}{(n-1)!}$$

für das Residuum von f mit einer Polstelle n-ter Ordnung in z_0 gerechnet. Sie folgt direkt aus der Cauchyschen Integralformel: Für ein homolorphes g gilt

$$g^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial D_r(z_0)} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz \Leftrightarrow g^{(n-1)}(z_0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \oint_{\partial D_r(z_0)} \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} \, dz.$$

Falls f eine Polstelle der Ordnung n hat, gilt

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} \Leftrightarrow g(z) = f(z)(z - z_0)^n$$

für eine holomorphe Funktion g. Mit der Cauchyschen Integralformel gilt dann

$$\begin{aligned}
&\oint_{\partial D_r(z_0)} \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} \, dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} g^{(n-1)}(z_0) \\
\Leftrightarrow &\oint_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)(z - z_0)^n}{(z - z_0)^n} \, dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} g(z) \\
\Leftrightarrow &\oint_{\partial D_r(z_0)} f(z) \, dz = 2\pi i \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{f(z)(z - z_0)^n}{(n-1)!} \stackrel{!}{=} 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0) \\
\Rightarrow &\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{f(z)(z - z_0)^n}{(n-1)!}.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\operatorname{Res}(\tilde{f}, x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{x^2}{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)} = \frac{x_1^2}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)}.$$

Nutzt man die Symmetrie der x_n, wird schnell klar, dass $x_1 - x_2 = \sqrt{2}$, $x_1 - x_3 = 2x_1, x_1 - x_4 = i\sqrt{2}$ gilt. Es folgt

$$\operatorname{Res}(\tilde{f}, x_1) = \frac{\exp(i\pi/2)}{2 \cdot 2 \cdot i \cdot x_1} = \frac{\overline{x_1}}{4} = \frac{x_4}{4}.$$

Analog gilt $\operatorname{Res}(\tilde{f}, x_1) = \overline{x_2}/4 = x_3/4$. Es folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + x^{-2}} \,\mathrm{d}x = 2\pi i \left(\frac{x_4 + x_3}{4} \right) = \frac{2\pi i(-\sqrt{2}i)}{4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

2. Es ist

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{ix}} \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{ix}} ie^{ix}}{ie^{ix}} \, dx = \int_{\partial D_1(0)} \frac{e^z}{iz} \, dz = \frac{2\pi i}{i} Res(f,0)$$

mit $f(z) := \frac{e^z}{z}$. Also

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{ix}} \, dx = 2\pi \lim_{z\to 0} e^z = 2\pi.$$

Bemerkung: Es gilt

$$e^{e^{ix}} = e^{\cos(x)+i\sin(x)} = e^{\cos(x)} e^{i\sin(x)} = e^{\cos(x)}(\cos(\sin(x)) + i\sin(\sin(x))).$$

Da $x \mapsto e^{\cos(x)} \sin(\sin(x))$ ungerade ist, folgt

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos(x)} \cos(\sin(x)) \, dx = \int_0^{2\pi} e^{e^{ix}} \, dx = 2\pi.$$

3. Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} \, dx = \lim_{R\to\infty} \left(\oint_{\gamma_R \cup [-R,R]} \frac{\cos(x)}{1+x^2} \, dx - \int_{\gamma_R} \frac{\cos(x)}{1+x^2} \, dx \right)$$

mit γ_R dem Halbkreisbogen in der positiven Halbebene (wie vorher). Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x)}{1+x^2} &= Re\left(\frac{e^{ix}}{1+x^2}\right) = Re\left(\frac{e^{iR(\cos(\phi)+i\sin(\phi))}}{1+R^2(\cos(\phi)+i\sin(\phi))^2}\right) \\ &= \frac{e^{-R\sin(\phi)}\cos(R\cos(\phi))}{1+R^2(\cos^2(\phi)-\sin^2(\phi))}\end{aligned}$$

und somit

$$0 \le \left| \int_{\gamma_R} \frac{\cos(x)}{1+x^2} \, dx \right| \le \pi R \cdot \frac{e^{-R\sin(\phi)}}{1+R^2(\cos^2(\phi)-\sin^2(\phi))} \overset{R\to\infty}{\to} 0$$

für $0 \le \phi \le \pi$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} \, dx &= \lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R \cup [-R,R]} \frac{\cos(x)}{1+x^2} \, dx \\ &= \mathrm{Re}\left(\lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R \cup [-R,R]} \frac{e^{ix}}{1+x^2} \, dx \right) \\ &= \mathrm{Re}(2\pi i \cdot Res(\tilde{f}, i))\end{aligned}$$

mit $\tilde{f}(z) := \frac{e^{iz}}{1+z^2}$. Es gilt

$$Res(\tilde{f}, i) = \lim_{x\to i} \frac{e^{ix}}{x+i} = \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{1}{2ei},$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} \, dx = \frac{2\pi i}{2ei} = \frac{\pi}{e}.$$

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

4. Es ist

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\sin(x)}\,dx &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4(e^{ix}-e^{-ix})/(2i)}\,dx \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{ie^{ix}}{(5+4(e^{ix}-e^{-ix})/(2i))ie^{ix}}\,dx \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{ie^{ix}}{(5e^{ix}-2i((e^{ix})^2-1))i}\,dx.\end{aligned}$$

Wähle $s(t) = e^{ix} \Rightarrow s'(t) = ie^{ix}$ als Parametrisierung des Einheitskreises, dann folgt

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\sin(x)}\,dx = -i \cdot \oint_{\partial D_1(0)} \frac{1}{5z-2iz^2+2i}\,dz$$

Es gilt $5z-2iz^2+2i = 0 \Leftrightarrow z \in \{-\frac{i}{2}, -2i\}$. Also gilt

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\sin(x)}\,dx &= \oint_{\partial D_1(0)} \frac{-i}{-2i(z+i/2)(z+2i)}\,dz \\ &= \frac{1}{2} \cdot \oint_{\partial D_1(0)} \frac{1}{(z+i/2)(z+2i)}\,dz \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot Res\left(f, -\frac{i}{2}\right)\end{aligned}$$

mit $f(z) := \frac{1}{(z+i/2)(z+2i)}$. Das Residuum dieser Funktion lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$Res\left(f, -\frac{i}{2}\right) = \lim_{z\to -i/2}\left(f(z)\cdot\left(z+\frac{i}{2}\right)\right) = \lim_{z\to -i/2} \frac{1}{z+2i} = \frac{1}{-i/2+2i} = \frac{2}{3i}.$$

Es folgt

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\sin(x)}\,dx = \pi i \cdot \frac{2}{3i} = \frac{2}{3}\pi.$$

Lösung 2

Es gilt

$$\int_{\partial G} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = 2\pi i(N_G(g) - P_G(g))$$

nach dem Satz von Rouché.

1. Wähle $g(z) := \cos(z)$, dann gilt $N_G(g) = 0$, $P_G(g) = 0$ und

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{-\sin(z)}{\cos(z)} = -f(z) \Rightarrow \int_{\partial D_1(0)} f(z)\,dz = -2\pi i(0-0) = 0.$$

   Man hätte auch direkt sehen können, dass $\tan(z)$ auf $D_1(0)$ holomorph ist.

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

2. Wähle $g(z) := \sin(z)$, dann gilt $N_G(g) = 1$, $P_G(g) = 0$ und

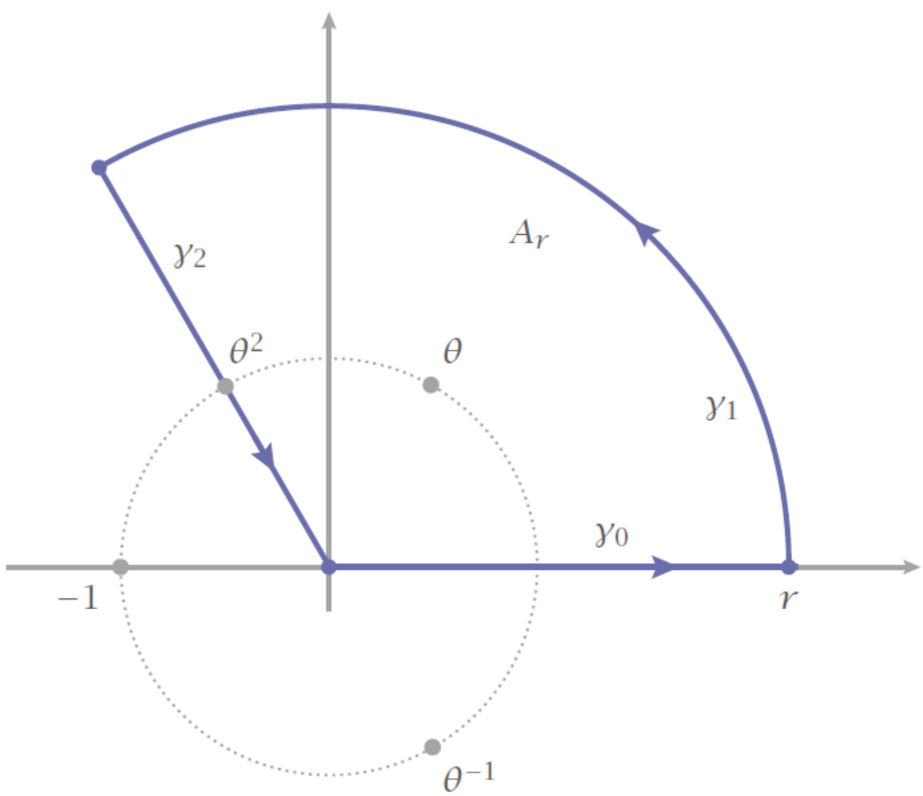
$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = f(z) \Rightarrow \int_{\partial D_1(0)} f(z)\,dz = 2\pi i(1-0) = 2\pi i$$

   Mit der Reihenentwicklung der letzten Vortragsübung hätte man auch

$$\int_{\partial D_1(0)} f(z)\,dz = \int_{\partial D_1(0)} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$$

   berechnen können.

Lösung 3



1. Die Polstellen von $f(z) = \dfrac{1}{1+z^3}$ werden bestimmt durch

$$1 + z^3 = 0 \Leftrightarrow z \in \{-1, \theta, \theta^{-1}\}, \theta = e^{i\pi/3}. \tag{1}$$

$$\Rightarrow \int_{\partial A_r} \frac{1}{1+z^3}\,dz = 2\pi i Res(f,\theta).$$

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Es gilt

$$Res\left(\frac{g}{h}, a\right) = \frac{g(a)}{h'(a)} \Rightarrow Res(f, \theta) = \frac{1}{3\theta^2}$$
$$\Rightarrow \int_{\partial A_r} \frac{1}{1+z^3}\, dz = \frac{2\pi i \theta}{3\theta^3} = -\frac{2}{3}\pi i \theta. \tag{2}$$

Wir wählen die Parametrisierung $z = \theta^2 t$ für die Intagration über γ_2, daraus ergibt sich $dz = \theta^2 dt$ und (mit $\theta^6 = 1$)

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{1+z^3}\, dz = \int_r^0 \frac{1}{1+(\theta^2 t)^3} \theta^2\, dt = -\theta^2 \int_0^r \frac{1}{1+t^3}\, dt = -\theta^2 \int_{\gamma_0} f(t)\, dt.$$

Wie üblich gilt

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz \overset{r\to\infty}{\to} 0$$
$$\Rightarrow \lim_{r\to\infty} \int_{\partial A_r} f(z)\, dz = \lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_0 \cup \gamma_2} f(z)\, dz = (1-\theta^2) \int_0^\infty \frac{1}{1+t^3}\, dt$$
$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{1+t^3}\, dt \overset{(2)}{=} -\frac{2}{3}\pi i \frac{\theta}{1-\theta^2} = \frac{2}{3}\pi i \frac{\theta}{\theta^2 - 1}. \tag{3}$$

Es ist

$$\frac{\theta^2 - 1}{\theta} = \theta - \theta^{-1} = 2i \operatorname{Im}\theta \overset{(1)}{=} 2i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2i\frac{\sqrt{3}}{2} = i\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{1+t^3}\, dt \overset{(3)}{=} \frac{2\pi i}{3\sqrt{3} i} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

2. Die Berechnung von $\int_0^\infty \frac{1}{1+t^5}\, dt$ verläuft analog: Es gilt

$$1 + z^5 = 0 \Leftrightarrow z \in \{-1, \theta, \theta^3, \theta^{-3}, \theta^{-1}\}, \theta = e^{i\pi/5} \Rightarrow \int_{\partial A_r} \frac{1}{1+z^3}\, dz = -\frac{2}{5}\pi i \theta \tag{4}$$

Wieder trennt θ^2 die Polstellen, daraus folgt

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{1+z^3}\, dz = -\theta^2 \int_{\gamma_0} f(z)\, dz \Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{1+t^3}\, dt \overset{(4)}{=} \frac{2}{5}\pi i \frac{\theta}{\theta^2 - 1}.$$

Es gilt

$$\frac{\theta^2 - 1}{\theta} = 2i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{1+t^5}\, dt = \frac{2\pi i}{5 \cdot 2i \sin(\pi/5)} = \frac{\pi/5}{\sin(\pi/5)}$$

3. Für $n \in 2\mathbb{N} - 1$ verläuft die Rechnung analog. Mit $a_n := \frac{\pi}{n}$ ergibt sich

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^n}\, dt = \frac{a_n}{\sin(a_n)}.$$

Insbesondere folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{1+t^n}\, dt = 1 = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+t^n}\, dt$$

aus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sin(a_n)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sin(x)} = 1 \text{ und } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n} = \chi_{[0,1]}(x) \text{ für } x \neq 1.$$

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Jonas Brinker M.Sc.
Maximilian Klumpp M.Sc.
Insitut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Lösung 4

1. Es ist

$$
\begin{aligned}
H\int_{\mathbb{R}} \tan(z)\,dz &= \lim_{r\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{[-r,r]\setminus I_\epsilon} \tan(z)\,dz \\
&= \lim_{N\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi/2+n\pi+\epsilon}^{\pi/2+n\pi-\epsilon} \tan(z)\,dz \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\pi/2+\epsilon}^{\pi/2-\epsilon} \tan(z)\,dz \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}} -\ln(\cos(z))\big|_{-\pi/2+\epsilon}^{\pi/2-\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}} 0 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

   Bemerkung: Das Integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \tan(z)\,dz$ exisiert nicht, weil insbesondere

$$
\int_0^{\pi/2} \tan(z)\,dz = \lim_{z\to\pi/2} \ln(\cos(z)) - \ln(1) = \lim_{z\to 0} \ln(z) - 0 = -\infty
$$

   nicht konvergiert.

2. f hat eine dreifache Nullstelle im Unendlichen, damit gilt nach Satz 68 aus dem Skript

$$
H\int_{\mathbb{R}} f(z)\,dz = 2\pi i Res(f,\theta) + \pi i Res(f,-1).
$$

   Aus Aufgabe 3 folgt

$$
2\pi i Res(f,\theta) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \text{ und } \pi i Res(f,-1) = \frac{\pi i}{3(-1)^2} = \frac{\pi i}{3}.
$$

   Damit ist

$$
H\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+z^3}\,dz = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi i}{3} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + i\right).
$$

   Bemerkung: Der Hauptwert ist eine komplexe Zahl, obwohl $\frac{1}{1+z^3} \in \mathbb{R}$. Das Integral $\int_{\mathbb{R}} f(z)\,dz$ divergiert.

Dieses Vortragsübungsblatt wird am

Dienstag, den 15.07.2019

besprochen.