

# 25

## Fourierreihen

Unter den  $L^p$ -Räumen nimmt der Raum  $L^2$  eine Sonderstellung ein, da es sich um einen *Hilbertraum* handelt – also einen unendlich-dimensionalen Raum, der in seiner geometrischen Struktur dem klassischen  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum am Nächsten kommt.

In einem Hilbertraum ist der Begriff der Orthogonalität wohldefiniert. Insbesondere besitzt jeder Hilbertraum eine *Hilbertraumbasis* aus orthonormalen Einheitsvektoren, und jedes Element besitzt eine eindeutige Darstellung durch eine, nicht notwendigerweise endliche, Linearkombination aus diesen Basisvektoren. Deren Koeffizienten heißen die *Fourierkoeffizienten* dieses Elementes bezüglich dieser Orthonormalbasis.

Das wichtigste Beispiel eines solchen Hilbertraums ist der Raum der  $2\pi$ -periodischen, quadrat-integrierbaren Funktionen mit der orthogonalen Basis

$$1, \quad \sin nx, \quad \cos nx, \quad n \geq 1.$$

Jede solche Funktion besitzt eine eindeutige Entwicklung in eine Fourierreihe,

$$f \sim a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

welche *in der  $L^2$ -Norm* und damit *fast überall* gegen  $f$  konvergiert.

Die Frage, in welchen Punkten diese Reihe *klassisch* konvergiert, ist damit jedoch noch nicht beantwortet. Dies ist tatsächlich ein sehr weites und schwieriges Feld, und wir werden nur einige der einfachsten Ergebnisse betreffend Konvergenz und Divergenz beweisen.

## 25.1 Hilberträume

In den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels beschreiben wir einige Grundlagen der Hilbertraumtheorie. Dazu betrachten wir allgemeine  $\mathbb{K}$ -Vektorräume, wo  $\mathbb{K}$  für  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  steht.

**Definition** Eine *hermitesche Form* auf einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $E$  ist eine im ersten Argument lineare, antisymmetrische Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}.$$

Es gilt also

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle,$$

$$\langle \alpha x, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle,$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*,$$

für  $x, y, z \in E$  und  $\alpha \in \mathbb{K}$ , wobei  $*$  die komplexe Konjugation bezeichnet.  $\times$

Eine hermitesche Form ist immer *ko-linear* im zweiten Argument und reell auf der Diagonalen. Es gilt also

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle,$$

$$\langle x, \alpha z \rangle = \alpha^* \langle x, z \rangle,$$

$$\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}.$$

Im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ist die komplexe Konjugation die Identität und eine hermitesche Form eine symmetrische *Bilinearform*. Im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  spricht man auch von einer antisymmetrischen *Sesquilinearform*. Übrigens ist bei manchen Autoren eine Sesquilinearform *ko-linear* im *ersten* und *linear* im *zweiten* Argument. Darauf ist zu achten.

Eine hermitesche Form heißt *positiv semidefinit*, wenn  $\langle x, x \rangle \geq 0$  für alle  $x \in E$ .

**1 Cauchy-Schwarzsche Ungleichung** Für eine positiv semidefinite hermitesche Form gilt

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle, \quad x, y \in E. \quad \times$$

⟨⟨⟨⟨ Für alle komplexen  $\alpha$  gilt

$$\langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + \alpha^* \langle x, y \rangle + \alpha \alpha^* \langle y, y \rangle \geq 0.$$

Ist  $\langle y, y \rangle > 0$ , so wählen wir

$$\alpha = -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

und erhalten

$$\langle x, x \rangle - 2 \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} = \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \geq 0,$$

was die Behauptung ergibt. Ist  $\langle x, x \rangle > 0$ , so führt Vertauschen von  $x$  und  $y$  zum selben Ergebnis. Ist aber  $\langle y, y \rangle = 0 = \langle x, x \rangle$ , so wählen wir  $\alpha = -\langle x, y \rangle$  und erhalten

$$-2 |\langle x, y \rangle|^2 \geq 0.$$

Also ist  $\langle x, y \rangle = 0$ , was in diesem Fall ebenfalls die Behauptung ergibt.  $\gggg$

### ■ Skalarprodukträume

**Definition** Eine hermitesche Form heißt *positiv definit*, wenn

$$\langle x, x \rangle > 0, \quad 0 \neq x \in E.$$

Eine solche Form heißt *Skalarprodukt* oder *inneres Produkt*, und der Raum  $E$  dementsprechend ein *Skalarproduktraum*.  $\times$

In diesem Fall gilt in der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung die Gleichheit genau dann, wenn  $x$  und  $y$  linear abhängig sind  $A^{-1}$ .

2 **Satz** Ein Skalarprodukt auf einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $E$  definiert durch

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

eine Norm auf  $E$ .  $\times$

$\llll$  Die Funktion  $\|\cdot\|$  ist definit, denn für ein inneres Produkt ist  $\langle x, x \rangle > 0$  für  $x \neq 0$  und damit  $\|x\| > 0$ . Sie ist auch positiv homogen, denn

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha \alpha^* \langle x, x \rangle} = |\alpha| \|x\|.$$

Die Dreiecksungleichung folgt schließlich mit Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq \langle x, x \rangle + 2 |\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Also ist  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .  $\gggg$

Damit schreibt sich die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auch als

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Eine direkte Rechnung ergibt außerdem die

- 3 **Parallelogrammgleichung** *In einem Skalarproduktraum gilt*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \|x\|^2 + 2 \|y\|^2. \quad \times$$

In einem Parallelogramm ist also die Summe der Quadrate der Seiten gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen. Schließlich noch eine elementare Stetigkeitsaussage.

- 4 **Satz** *Auf einem Skalarproduktraum  $E$  sind die Abbildungen  $x \mapsto \|x\|$  sowie  $x \mapsto \langle x, v \rangle$  für jedes  $v \in E$  gleichmäßig stetig.*  $\times$

⟨⟨⟨⟨ Aufgrund der Dreiecksungleichung für die induzierte Norm gilt

$$|\|x\| - \|z\|| \leq \|x - z\|.$$

Somit ist  $x \mapsto \|x\|$  sogar 1-lipschitz. Mit Cauchy-Schwarz ist ferner

$$|\langle x, v \rangle - \langle z, v \rangle| = |\langle x - z, v \rangle| \leq \|x - z\| \|v\|.$$

Also ist  $x \mapsto \langle x, v \rangle$  lipschitz mit Lipschitzkonstante  $\|v\|$ .  $\rangle\rangle\rangle\rangle$

#### ■ Quadratische Formen

Ein Hilbertraum ist immer auch ein Banachraum. Eine interessante Frage ist, ob man umgekehrt einer Norm ansehen kann, ob sie von einem Skalarprodukt abstammt. Die Antwort gibt der folgende Satz, den wir später allerdings nicht benötigen.

- 5 **Satz** *Die Norm eines normierten Raums wird durch ein Skalarprodukt genau dann induziert, wenn die Parallelogrammgleichung<sub>3</sub> gilt.*  $\times$

⟨⟨⟨⟨ Zur Vereinfachung der Rechnung sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Wird die Norm tatsächlich durch ein inneres Produkt induziert, so führt Auflösen von  $\|x + y\|^2$  und  $\|x - y\|^2$  zu der Identität

$$4 \langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2.$$

Wir *definieren* also die linke Seite durch die rechte Seite und zeigen, dass dies im reellen Fall eine symmetrische Bilinearform darstellt.

Die Stetigkeit ist klar, ebenso die Symmetrie in  $x$  und  $y$ . Die Additivität im ersten Argument,  $\langle u + v, y \rangle = \langle u, y \rangle + \langle v, y \rangle$ , ist äquivalent zur Identität

$$\begin{aligned} & \|u + v + y\|^2 - \|u + v - y\|^2 \\ &= \|u + y\|^2 - \|u - y\|^2 + \|v + y\|^2 - \|v - y\|^2. \end{aligned}$$

Aufgrund des Parallelogrammgesetzes haben wir aber

$$\begin{aligned} \|u + v + y\|^2 &= 2\|u + y\|^2 + 2\|v\|^2 - \|u - v + y\|^2 \\ &= 2\|v + y\|^2 + 2\|u\|^2 - \|v - u + y\|^2. \end{aligned}$$

Die Summe aus beiden rechten Seiten geteilt durch 2 ergibt

$$\begin{aligned} \|u + v + y\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|u + y\|^2 + \|v + y\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\|u - v + y\|^2 - \frac{1}{2}\|u - v - y\|^2. \end{aligned}$$

Entsprechendes gilt mit  $-y$  anstelle von  $y$ ,

$$\begin{aligned} \|u + v - y\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|u - y\|^2 + \|v - y\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\|u - v - y\|^2 - \frac{1}{2}\|u - v + y\|^2. \end{aligned}$$

Subtraktion dieser beiden Identitäten ergibt die gewünschte Gleichung.

Die Homogenität im ersten Argument zeigen wir schrittweise. Für ganze Zahlen  $m$  gilt aufgrund der Additivität  $\langle mx, y \rangle = m \langle x, y \rangle$ . Für rationale Zahlen  $m/n$  erhält man das entsprechende Ergebnis aus

$$\langle mx/n, y \rangle = \frac{1}{n} n \langle mx/n, y \rangle = \frac{1}{n} \langle mx, y \rangle = \frac{m}{n} \langle x, y \rangle.$$

Für beliebige reelle Faktoren folgt dies schließlich aus Stetigkeitsgründen.  $\gggg$

Dieses Ergebnis lässt sich auch wie folgt formulieren. Ist  $\sigma: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  eine hermitesche Form auf einem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $E$  und

$$\varphi: E \rightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi(x) = \sigma(x, x)$$

die zugehörige *quadratische Form*, so gewinnt man  $\sigma$  aus  $\varphi$  zurück mithilfe der *Polarisierungsgleichung*

$$4\sigma(x, y) = \varphi(x + y) - \varphi(x - y) + i\varphi(x + iy) - i\varphi(x - iy).$$

Im reellen Fall gilt diese Identität ohne die beiden komplexen Terme. Hermitesche Formen sind also bereits vollständig durch ihre Werte auf der Diagonalen definiert. Aus diesem Grund gibt man diese oft auch nur auf der Diagonalen an, also zum Beispiel

$$\langle z, z \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} |z_i|^2, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

### ■ Hilberträume

Ein Skalarproduktraum ist immer auch ein normierter Raum. Ist der Raum mit dieser Norm vollständig, so spricht man von einem *Hilbertraum*.

**Definition** Ein *Hilbertraum* ist ein Skalarproduktraum, der mit der induzierten Norm vollständig ist. ✕

6 ▶ *Beispiele für Hilberträume* A. Die reellen Zahlen wie die komplexen Zahlen mit der üblichen Multiplikation bilden einen *reellen* Hilbertraum.

B. Der Raum  $\mathbb{C}^n$  mit der *Standardform*

$$\langle x, y \rangle := \sum_{1 \leq i \leq n} x_i y_i^*$$

ist ein komplexer Hilbertraum. Im Fall  $n = 1$  ist dies der Raum der komplexen Zahlen mit dem Produkt  $\langle x, y \rangle = x y^*$ .

C. Ist  $A$  eine hermitesche  $n \times n$ -Matrix, also  $A^T = A^-$ , so definiert

$$\langle x, y \rangle_A := \langle Ax, y \rangle$$

eine hermitesche Form auf  $\mathbb{C}^n$ , die für  $A = I$  gleich der Standardform ist. Das Spektrum  $\sigma(A)$  einer hermiteschen Matrix ist immer reell, und  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$  ist definit genau dann, wenn  $\sigma(A) > 0$  A-3.

D. Der Vektorraum  $C([a, b])$  aller reellen stetigen Funktionen auf  $[a, b]$  ist ein Skalarproduktraum mit

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

Er ist aber nicht vollständig, also kein Hilbertraum.

E. Sei  $\mu$  ein beliebiges Maß auf  $\mathbb{R}^n$ . Auf dem Raum  $L^2(\mu)$  der quadratintegrierbaren komplexwertigen Funktionen wird durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f g^* d\mu$$

ein inneres Produkt definiert. Dieses ist wohldefiniert, denn wegen der hölderischen Ungleichung ist  $f g^* \in L^1(\mu)$  für  $f, g \in L^2(\mu)$ . Es ist offensichtlich linear im ersten Argument und antisymmetrisch. Es ist auch definit, denn

$$\langle f, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 d\mu = 0 \iff |f| =_{\mu} 0$$

und damit  $f = 0$  in  $L^2(\mu)$ . Die induzierte Norm ist gerade die  $L^2$ -Norm, denn

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 d\mu = \|f\|_2^2.$$

Aufgrund des Satzes von Riesz-Fischer 24.11 ist  $L^2(\mu)$  vollständig, also ein Hilbertraum. Dies gilt für jedes Maß  $\mu$  auf dem  $\mathbb{R}^n$ .

F. Sei  $A$  eine beliebige, nicht notwendig abzählbare Indexmenge. Definiere  $\ell^2(A)$  als Raum aller Familien  $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$  komplexer Zahlen mit  $A-15$

$$\|x\|_\ell^2 := \sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|^2 < \infty.$$

Ist  $y$  eine weitere solche Familie, so definiert

$$\langle x, y \rangle_A = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha y_\alpha^*$$

ein Skalarprodukt, mit dem  $\ell^2(A)$  ein Hilbertraum wird  $A-17$ . Typische Vertreter sind die Folgenräume  $\ell^2(\mathbb{N})$  und  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .

G. Dasselbe gilt, wenn man statt komplexer Zahlen Elemente aus einer entsprechenden Familie von Hilberträumen  $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$  zulässt und

$$\langle x, y \rangle_A = \sum_{\alpha \in A} \langle x_\alpha, y_\alpha \rangle_{E_\alpha}$$

definiert. ◀◀

## 25.2

### Orthonormale Basen

Der Begriff der *Orthogonalität* ist grundlegend in der Hilbertraumtheorie. Dieser basiert auf dem Skalarprodukt und existiert in Banachräumen nicht.

**Definition** In einem Hilbertraum heißen zwei Vektoren  $u$  und  $v$  *orthogonal*, geschrieben  $u \perp v$ , wenn  $\langle u, v \rangle = 0$ . ✕

Die Relation  $\perp$  ist offensichtlich symmetrisch, jedoch nicht reflexiv oder transitiv. Vielmehr folgt aus  $u \perp u$  notwendigerweise  $u = 0$ . Der Nullvektor selbst steht orthogonal zu allen Vektoren eines Hilbertraums.

7 **Satz des Pythagoras** Für orthogonale Vektoren  $u$  und  $v$  gilt

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2. \quad \times$$

◀◀◀ Dies ist eine direkte Rechnung wie beim Parallelogrammgesetz. Oder vielmehr ist es das Parallelogrammgesetz für Rechtecke. ▶▶▶

8 **Definition und Lemma** Ist  $M$  eine beliebige nichtleere Teilmenge in  $E$ , so ist dessen *orthogonales Komplement*

$$M^\perp := \{v \in E : v \perp u \text{ für alle } u \in M\}$$

ein abgeschlossener Unterraum von  $E$ . ✕

««« Für jedes  $u \in E$  ist

$$u^\perp := \{\nu \in E : \nu \perp u\} = \{\nu \in E : \langle \nu, u \rangle = 0\}$$

der Kern der stetigen  $_4$  Linearform  $\langle \cdot, u \rangle$  und damit ein abgeschlossener linearer Unterraum  $_{10.10}$ . Dann ist aber auch

$$M^\perp = \bigcap_{u \in M} u^\perp$$

als Durchschnitt einer beliebigen Familie von abgeschlossenen linearen Unterräumen ebenfalls abgeschlossen und linear. »»»

- 9 **Satz** Sei  $M$  eine nichtleere abgeschlossene, konvexe Teilmenge eines Hilbertraums  $E$ . Dann existiert zu jedem  $x \in E$  ein eindeutiges *bestapproximierendes Element*  $P(x) \in M$ . Es gilt also

$$\|x - P(x)\| = \inf \{\|x - u\| : u \in M\}.$$

Ist  $M$  ein abgeschlossener Unterraum von  $E$ , so gilt

$$x - P(x) \in M^\perp,$$

und diese Eigenschaft charakterisiert  $P(x)$  ebenfalls eindeutig. ✕

««« Sei  $m = \inf \{\|x - u\| : u \in M\}$  und  $\nu, w \in M$ . Aufgrund der Parallelogrammgleichung gilt

$$\begin{aligned} 2\|x - \nu\|^2 + 2\|x - w\|^2 &= \|\nu - w\|^2 + \|2x - \nu - w\|^2 \\ &= \|\nu - w\|^2 + 4\|x - (\nu + w)/2\|^2. \end{aligned}$$

Aufgrund der Konvexität von  $M$  gehört  $(\nu + w)/2$  ebenfalls zu  $M$ . Der letzte Summand ist daher größer oder gleich  $4m^2$ , und wir erhalten

$$\|\nu - w\|^2 \leq 2\|x - \nu\|^2 + 2\|x - w\|^2 - 4m^2.$$

Das ergibt bereits die Eindeutigkeit eines bestapproximierenden Elements. Denn sind  $\nu$  und  $w$  zwei solche Elemente in  $M$ , so geht die rechte Seite über in  $2m^2 + 2m^2 - 4m^2 = 0$ , und es folgt  $\nu = w$ .

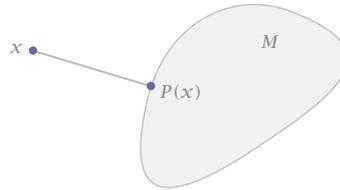
Um seine Existenz zu zeigen, sei  $(u_n)$  eine Folge in  $M$  mit  $\|x - u_n\| \rightarrow m$ . Dann folgt aus derselben Ungleichung

$$\|u_n - u_m\|^2 \leq 2\|x - u_n\|^2 + 2\|x - u_m\|^2 - 4m^2 \rightarrow 0.$$

Also bildet  $(u_n)$  eine Cauchyfolge. Deren Grenzwert  $u$  existiert, da  $E$  vollständig ist, und gehört zu  $M$ , da  $M$  abgeschlossen ist. Aus Stetigkeitsgründen gilt ferner

$$\|x - u\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - u_n\| = m.$$

Abb 1

Bestapproximierendes  
Element

Also ist  $u \in M$  das eindeutig bestimmte bestapproximierende Element zu  $x$ , und  $P(x) := u$  ist wohldefiniert.

Sei nun  $M$  ein linearer Unterraum von  $E$ . Für jedes  $w \in M$  und jeden Skalar  $\alpha$  gilt dann

$$\|x - u\|^2 \leq \|x - u - \alpha w\|^2.$$

Mit  $v = x - u$  ist also  $\langle v, v \rangle \leq \langle v - \alpha w, v - \alpha w \rangle$ , was äquivalent ist mit

$$\alpha \langle w, v \rangle + \alpha^* \langle v, w \rangle \leq |\alpha|^2 \|w\|^2.$$

Mit  $\alpha = \langle v, w \rangle$  ergibt dies

$$2 |\langle v, w \rangle|^2 \leq |\langle v, w \rangle|^2 \|w\|^2, \quad w \in M.$$

Daraus folgt  $\langle v, w \rangle = 0$  für  $w \in M$ , und damit  $v = x - u \in M^\perp$ .

Ist umgekehrt  $v = x - u \in M^\perp$ , so ist  $\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \geq \|v\|^2$  für alle  $w \in M$  und damit  $u$  das zu  $x$  bestapproximierende Element in  $M$ .  $\gggg$

Ist  $M$  ein abgeschlossener Unterraum, so nennt man die im letzten Satz definierte Abbildung  $P: E \rightarrow M$  auf das bestapproximierende Element die *orthogonale Projektion* von  $E$  auf  $M$ . Diese Abbildung ist linear.

- 10 **Satz** Sei  $M$  ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraums  $E$ . Dann ist die orthogonale Projektion  $P: E \rightarrow M$  diejenige stetige lineare Abbildung mit

$$Q = I - P: E \rightarrow M^\perp. \quad \times$$

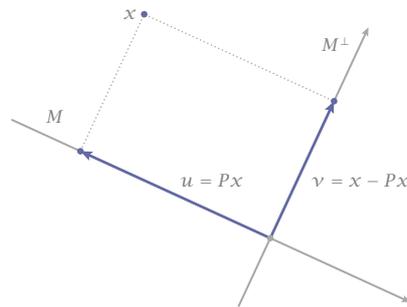
$\llll$  Wir haben bereits gezeigt, dass  $Q = I - P: E \rightarrow M^\perp$ . Um die Linearität von  $P$  und  $Q$  zu zeigen, wenden wir die Identität  $I = P + Q$  auf  $\lambda x + \mu y$  sowie  $x$  und  $y$  an und erhalten

$$\begin{aligned} P(\lambda x + \mu y) + Q(\lambda x + \mu y) \\ = \lambda x + \mu y = \lambda(Px + Qx) + \mu(Py + Qy), \end{aligned}$$

oder

$$P(\lambda x + \mu y) - \lambda Px - \mu Py = \lambda Qx + \mu Qy - Q(\lambda x + \mu y).$$

Abb 2  
Orthogonale Projektion



Die linke Seite gehört zu  $M$ , die rechte zu  $M^\perp$ . Wegen  $M \cap M^\perp = \{0\}$  sind daher beide Seiten 0, was die Linearität ergibt. Die Stetigkeit von  $P$  folgt dann mit

$$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2 \geq \|Px\|^2, \quad x \in E.$$

Ist umgekehrt  $P: E \rightarrow M$  eine Abbildung mit  $I - P: E \rightarrow M^\perp$ , so ist aufgrund des vorangehenden Satzes  $Px$  für jedes  $x \in E$  das bestapproximierende Element in  $M$  an  $x$ , also die orthogonale Projektion von  $E$  auf  $M$ .  $\gggg$

Aus  $P: E \rightarrow M$  und  $I - P: E \rightarrow M^\perp$  folgt übrigens  $P = I$  auf  $M$   $A_{-5}$ .

- 11 **Korollar** Ist  $M$  ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraums  $E$ , so ist  $E$  die direkte Summe aus  $M$  und  $M^\perp$ , geschrieben

$$E = M \oplus M^\perp.$$

Das heißt,  $M$  und  $M^\perp$  sind abgeschlossene Unterräume von  $E$  mit

$$M + M^\perp = E, \quad M \cap M^\perp = \{0\}.$$

Jedes Element von  $E$  besitzt dann eine eindeutige Darstellung

$$x = Px + Qx \in M \oplus M^\perp$$

mit den orthogonalen Projektionen  $P$  auf  $M$  und  $Q = I - P$  auf  $M^\perp$ .  $\times$

Für jedes  $v \in E$  definiert  $\langle \cdot, v \rangle$  eine stetige Linearform auf  $E$   $A_4$ , also ein Element des Dualraums  $E^*$  von  $E$ . Tatsächlich kann jedes Element von  $E^*$  auf diese Weise dargestellt werden.

- 12 **Rieszscher Darstellungssatz** Ist  $E$  ein Hilbertraum, so existiert zu jeder Linearform  $\Lambda \in E^*$  ein eindeutiges Element  $v \in E$ , so dass

$$\Lambda = \langle \cdot, v \rangle. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Die Eindeutigkeit von  $\nu$  folgt aus der Definitheit des Skalarproduktes. Um die Existenz zu zeigen, sei

$$M = \ker L = \{x : Lx = 0\}.$$

Wegen der Linearität und Stetigkeit von  $L$  ist dies ein abgeschlossener Unterraum von  $E$ . Ist  $M = E$ , so ist  $L = 0$ , und wir können  $\nu = 0$  wählen. Andernfalls existiert ein Element  $\nu \in M^\perp$  mit  $\|\nu\| = 1$  und  $L\nu = 1$ . Für jedes  $x \in E$  ist dann

$$u := (Lx)\nu - x \in \ker L = M.$$

Wenden wir  $L$  auf  $x + u = (Lx)\nu$  an, so folgt

$$\langle x, \nu \rangle = \langle x + u, \nu \rangle = \langle (Lx)\nu, \nu \rangle = Lx. \quad \rangle\rangle\rangle$$

Man kann also einen Hilbertraum  $E$  mit seinem Dualraum  $E^*$  identifizieren. Tatsächlich ist die Abbildung

$$T : E \rightarrow E^*, \quad \nu \mapsto T\nu = \langle \cdot, \nu \rangle$$

ein isometrischer ko-linearer Isomorphismus. Der Beweis ist als Übungsaufgabe überlassen.

#### ■ Orthonormale Familien

Der Begriff der linearen Unabhängigkeit endlich vieler Vektoren ist aus der linearen Algebra bekannt. Wir verallgemeinern ihn nun auf beliebige, nicht notwendig abzählbare Familien von Vektoren.

**Definition** Eine Familie  $\mathcal{U}$  von Vektoren eines Vektorraumes heißt *linear unabhängig*, wenn es jede endliche Auswahl von Vektoren in  $\mathcal{U}$  ist. ✕

Unser spezielles Interesse gilt *orthonormalen* Familien.

**Definition** Eine Familie  $\mathcal{U}$  von nichtverschwindenden Vektoren eines Hilbertraums heißt *orthogonal*, wenn diese Vektoren paarweise orthogonal sind. Sie heißt *orthonormal*, wenn außerdem alle Vektoren normiert sind. ✕

- 13 ▶ A. Sei  $A$  eine beliebige Indexmenge. Auf dem Hilbertraum  $\ell^2(A)$  bilden die Standardbasisvektoren

$$e_\alpha = (\delta_{\alpha\sigma})_{\sigma \in A}, \quad \alpha \in A$$

eine orthonormale Familie.

- B. Sei  $\mathbb{T} := [-\pi, \pi]$ . Auf  $L^2(\mathbb{T}, \lambda)$  wird durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{T}} f g^* \, d\lambda := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f g^* \, d\lambda$$

ein Skalarprodukt definiert. Die Funktionen

$$e_n := e^{int}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

bilden diesbezüglich eine orthonormale Familie, denn

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt = \delta_{nm}.$$

Diesen Raum werden wir im nächsten Abschnitt noch genauer betrachten. ◀

Das folgende Lemma ist elementar, aber wichtig. Es zeigt unter anderem, dass jede orthonormale Familie linear unabhängig ist.

- 14 **Lemma** Die Vektoren  $u_1, \dots, u_m$  seien orthonormal und  $x = \sum_{1 \leq k \leq m} x_k u_k$  eine beliebige Linearkombination aus ihnen. Dann gilt

$$x_k = \langle x, u_k \rangle, \quad 1 \leq k \leq m,$$

und

$$\|x\|^2 = \sum_{1 \leq k \leq m} |x_k|^2. \quad \times$$

◀◀◀ Offensichtlich ist

$$\langle u, u_k \rangle = \sum_{1 \leq l \leq m} x_l \langle u_l, u_k \rangle = \sum_{1 \leq l \leq m} x_l \delta_{lk} = x_k$$

und

$$\|u\|^2 = \sum_{1 \leq k, l \leq m} x_k \bar{x}_l \langle u_k, u_l \rangle = \sum_{1 \leq k, l \leq m} x_k \bar{x}_l \delta_{kl} = \sum_{1 \leq k \leq m} |x_k|^2.$$

Ist also  $u = 0$ , so sind alle  $x_k$  Null. Daher ist jede orthonormale Familie linear unabhängig. ▶▶▶

Die hierbei auftretenden Koeffizienten spielen im Folgenden eine entscheidende Rolle und haben daher auch einen eigenen Namen.

**Definition** Ist  $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$  eine orthonormale Familie, so heißen

$$\hat{x}_\alpha := \langle x, u_\alpha \rangle, \quad \alpha \in A,$$

die *Fourierkoeffizienten* von  $x$  bezüglich dieser Familie.  $\times$

- 15 **Satz** Sind die Vektoren  $u_1, \dots, u_m$  orthonormal, so ist die orthogonale Projektion auf den Unterraum  $M = \text{span}\{u_1, \dots, u_m\}$  gegeben durch

$$P: E \rightarrow M, \quad Px = \sum_{1 \leq k \leq m} \hat{x}_k u_k.$$

Für diese gilt

$$\sum_{1 \leq k \leq m} |\hat{x}_k|^2 = \|x\|^2 - \|x - Px\|^2. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Es ist klar, dass  $M$  abgeschlossen ist. Die orthogonale Projektion  $P$  auf  $M$  ist somit wohldefiniert <sup>10</sup>, und es gilt

$$Px = \sum_{1 \leq k \leq m} x_k u_k$$

mit Koeffizienten  $x_k$  derart, dass  $x - Px \perp M$ . Also ist  $\langle x - Px, u_k \rangle = 0$ , oder

$$x_k = \langle Px, u_k \rangle = \langle x, u_k \rangle = \hat{x}_k, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Die letzte Identität ist äquivalent zu  $\|Px\|^2 + \|x - Px\|^2 = \|x\|^2$  <sup>10</sup>. ⟩⟩⟩

*Bemerkung* Man gelangt zu diesem Ergebnis auch durch eine direkte Rechnung. Seien  $u_1, \dots, u_m$  orthonormal. Für beliebiges  $u = x_1 u_1 + \dots + x_m u_m$  und jedes  $x$  gilt dann

$$\|x - u\|^2 = \sum_{1 \leq k \leq m} |x_k - \hat{x}_k|^2 + \sum_{1 \leq k \leq m} |x_k|^2$$

mit den Fourierkoeffizienten  $\hat{x}_k = \langle x, u_k \rangle$ . Die rechte Seite wird minimal für  $x_k = \hat{x}_k$  und liefert so das bestapproximierende Element in  $\text{span}\{u_1, \dots, u_m\}$  an  $x$  <sup>A-25</sup>. ◊

- 16 **Besselsche Ungleichung** Ist  $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$  eine orthonormale Familie in  $E$ , so gilt für jeden Vektor  $x \in E$  die Ungleichung <sup>13</sup>

$$\sum_{\alpha \in A} |\hat{x}_\alpha|^2 \leq \|x\|^2.$$

Insbesondere ist  $\{\alpha \in A : \hat{x}_\alpha \neq 0\}$  höchstens abzählbar unendlich. ✕

⟨⟨⟨ Für jede endliche Indexmenge  $B \subset A$  gilt aufgrund des letzten Satzes

$$\sum_{\alpha \in B} |\hat{x}_\alpha|^2 \leq \|x\|^2.$$

Also gilt dies auch für das Supremum über alle solche Teilmengen  $B \subset A$ . ⟩⟩⟩

#### ■ Der Satz von Riesz-Fischer

Ist  $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$  eine orthonormale Familie in einem Hilbertraum  $E$ , so können wir also jedem  $x \in E$  seine diesbezügliche Familie von Fourierkoeffizienten

$$\hat{x} = (\hat{x}_\alpha)_{\alpha \in A}$$

zuordnen, wobei  $\hat{x}_\alpha = \langle x, u_\alpha \rangle$ . Dies definiert eine lineare Abbildung

$$\mathcal{F}: E \rightarrow \ell^2(A), \quad x \mapsto \hat{x} = (\hat{x}_\alpha)_{\alpha \in A}.$$

Diese ist stetig, sogar 1-lipschitz aufgrund der Besselschen Ungleichung <sup>16</sup>.

Wie bei jeder linearen Abbildung stellt sich die Frage, ob  $\mathcal{F}$  injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv ist. Die Frage nach der Surjektivität beantwortet der

- 17 **Satz von Riesz-Fischer** Sei  $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$  eine orthonormale Familie in  $E$ . Dann ist die zugehörige Fourierkoeffizientenabbildung  $\mathcal{F}$  surjektiv.  $\times$

⟨⟨⟨ Ist  $z = (z_\alpha) \in \ell^2(A)$  gegeben, so sei

$$A_n := \{\alpha \in A : |z_\alpha| > 1/n\}, \quad n \geq 1.$$

Wegen  $\|z\|_\ell < \infty$  bilden die  $A_n$  eine steigende Folge endlicher Mengen. Für

$$x_n := \sum_{\alpha \in A_n} z_\alpha u_\alpha, \quad n \geq 1,$$

gilt dann

$$\langle x_n, u_\alpha \rangle \rightarrow z_\alpha, \quad \alpha \in A.$$

Die Folge  $(\hat{x}_n)$  der Fourierkoeffizienten konvergiert also punktweise gegen  $z$ . Außerdem gilt  $\|\hat{x}_n\|_\ell \leq \|z\|_\ell$ . Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt hieraus  $\|\hat{x}_n - z\|_\ell \rightarrow 0$ . Somit ist  $(\hat{x}_n)$  eine Cauchyfolge in  $\ell^2(A)$ . Wegen 14

$$\|x_n - x_m\|_E = \|\hat{x}_n - \hat{x}_m\|_\ell$$

gilt dasselbe für die Folge  $(x_n)$  in  $E$ . Somit existiert  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  in  $E$ . Für dieses Element gilt  $\hat{x} = z$ , da

$$\hat{x}_\alpha = \langle x, u_\alpha \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, u_\alpha \rangle = z_\alpha, \quad \alpha \in A. \quad \rangle\rangle\rangle$$

#### ■ Orthonormale Basen

Es bleibt die Frage, unter welchen Bedingungen die Fourierkoeffizientenabbildung  $\mathcal{F}$  auch *injektiv* ist. Mit anderen Worten, wann ist ein Element durch seine Fourierkoeffizienten eindeutig bestimmt? Dies ist offensichtlich *nicht* der Fall, wenn die orthonormale Familie  $(u_\alpha)$  »zu klein« ist. Vielmehr muss diese Familie *vollständig* sein und eine *Basis* des Hilbertraums bilden.

**Definition** Eine Familie  $\mathcal{U}$  orthonormaler Vektoren in  $E$  heißt *maximal*, wenn

$$\mathcal{U}^\perp = \{0\}. \quad \times$$

Mit anderen Worten, man kann keinen weiteren nichttrivialen Vektor zu  $\mathcal{U}$  hinzufügen, der orthogonal auf allen Vektoren in  $\mathcal{U}$  steht.

- 18 **Satz** Für eine orthonormale Familie  $\mathcal{U} = (u_\alpha)_{\alpha \in A}$  in  $E$  sind folgende Aussagen äquivalent.
- (i) Die Familie  $\mathcal{U}$  ist maximal.
  - (ii) Der Raum  $L$  aller endlichen Linearkombinationen aus  $\mathcal{U}$  ist dicht in  $E$ .

(iii) Für alle  $x \in E$  gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}_\alpha|^2.$$

(iv) Für alle  $x, y \in E$  gilt  $\langle x, y \rangle_E = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle_\ell$ .  $\times$

⟨⟨⟨ (i) ⇒ (ii) Offensichtlich ist  $L$  ein linearer Unterraum von  $E$ . Also ist  $M = L^\perp$  ein abgeschlossener Unterraum von  $E$  und  $M \oplus M^\perp = E$ . Wäre  $M \neq E$ , so wäre  $M^\perp$  nicht trivial, und es gäbe ein  $0 \neq v \perp M$ . Dann aber ist auch  $v \perp \mathcal{U}$ , ein Widerspruch zur Maximalität von  $\mathcal{U}$ .

(ii) ⇒ (iii) Sei  $x \in E$ . Da  $L$  dicht in  $E$  ist, existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine endliche Linearkombination

$$u = \sum_{1 \leq i \leq m} \lambda_{\alpha_i} u_{\alpha_i}$$

mit  $\|x - u\| < \varepsilon$ . Dies gilt erst recht, wenn wir die  $\lambda_{\alpha_i}$  durch die entsprechenden Fourierkoeffizienten  $\hat{x}_{\alpha_i}$  ersetzen. Es gilt also

$$\|x - v\| < \varepsilon, \quad v = \sum_{1 \leq i \leq m} \hat{x}_{\alpha_i} u_{\alpha_i}.$$

Dann ist  $\|x\| \leq \|v\| + \varepsilon$  und

$$(\|x\| - \varepsilon)^2 \leq \|v\|^2 = \sum_{1 \leq i \leq m} |\hat{x}_{\alpha_i}|^2 \leq \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}_\alpha|^2.$$

Da dies für alle  $\varepsilon > 0$  gilt, folgt hieraus

$$\|x\|^2 \leq \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}_\alpha|^2.$$

Zusammen mit der Besselschen Ungleichung <sup>16</sup> ergibt dies die Behauptung.

(iii) ⇒ (iv) Nach Annahme gilt  $\langle x, x \rangle_E = \langle \hat{x}, \hat{x} \rangle_\ell$ . Da ein Skalarprodukt bereits vollständig durch seine Werte auf der Diagonalen bestimmt ist <sup>5</sup>, gilt dann auch  $\langle x, y \rangle_E = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle_\ell$ .

(iv) ⇒ (i) Gilt (i) nicht, so existiert ein  $0 \neq u \in \mathcal{U}^\perp$ . Also ist  $\langle u, u \rangle_E \neq 0$ , aber

$$\langle \hat{u}, \hat{u} \rangle_\ell = \sum_{\alpha \in A} |\langle u, u_\alpha \rangle|^2 = 0,$$

ein Widerspruch.  $\gggg$

**Definition** Eine maximale orthonormale Familie heißt *orthonormale Basis* des Hilbertraums.  $\times$

**19 Satz** Ist  $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$  eine orthonormale Basis eines Hilbertraums, so definiert die diesbezügliche *diskrete Fouriertransformation*

$$\mathcal{F}: E \rightarrow \ell^2(A), \quad x \mapsto \hat{x}$$

einen linearen isometrischen Isomorphismus.  $\times$

⟨⟨⟨ Die Surjektivität ist bereits gezeigt <sup>17</sup>. Ist  $\mathcal{F}(x) = 0$ , so ist  $x \perp u_\alpha$  für alle  $\alpha \in A$  und damit  $x = 0$  wegen der Maximalität der  $(u_\alpha)$ . Somit ist  $\mathcal{F}$  auch injektiv. Die Isometrie ist gleichbedeutend mit der Parsevalschen Identität <sup>18</sup>. ⟩⟩⟩

Eine orthonormale Basis eines Hilbertraums ist übrigens *keine* Hamelbasis, denn die *endlichen* Linearkombinationen spannen nur einen echten, wenn auch dichten Unterraum eines unendlich dimensionalen Hilbertraums auf.

Es gilt der allgemeine Satz, dass jeder Hilbertraum eine orthonormale Basis besitzt – der Beweis beruht auf dem Basiserweiterungssatz und dem Auswahlaxiom und soll hier nicht ausgeführt werden. Somit ist auch jeder Hilbertraum isometrisch zu einem Folgenraum  $\ell^2(A)$  mit einer geeigneten Indexmenge  $A$ , und diese unterscheiden sich untereinander nur hinsichtlich der Kardinalität von  $A$ . Alle uns interessierenden Hilberträume haben allerdings eine abzählbare Basis.

**20 Satz** *Jeder unendlich dimensionale separable Hilbertraum besitzt eine abzählbare orthonormale Basis und ist damit isometrisch zu  $\ell^2(\mathbb{N})$ .*  $\times$

⟨⟨⟨ Für jede orthonormale Basis  $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$  gilt  $\|u_\alpha - u_\beta\| = \sqrt{2}$  für  $\alpha \neq \beta$ . Somit wäre der Hilbertraum nicht separabel, wenn  $A$  überabzählbar wäre. ⟩⟩⟩

### 25.3 Fourierreihen

Das vielleicht wichtigste Beispiel einer orthonormalen Basis bilden die Funktionen  $\sin nx$ ,  $\cos nx$  für Räume  $2\pi$ -periodischer Funktionen. Zunächst einige Begriffe und Notationen. Wir setzen  $\mathbb{T} := [-\pi, \pi]$  und betrachten den Raum

$$L^2(\mathbb{T}) := L^2(\mathbb{T}, \lambda)$$

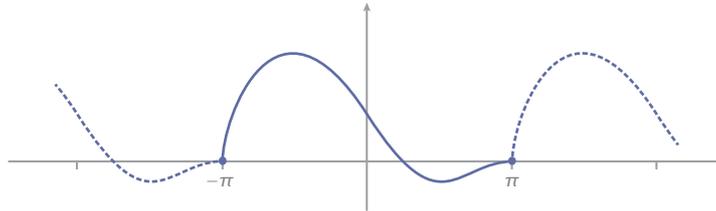
aller *komplexwertigen* quadratintegrierbaren Funktionen auf  $\mathbb{T}$ . Mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{T}} f \bar{g} \, d\lambda := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \bar{g} \, d\lambda$$

ist dies ein Hilbertraum <sup>24.11</sup> mit der Norm

$$\|f\|^2 := \int_{\mathbb{T}} |f|^2 \, d\lambda := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt.$$

Elemente in  $L^2(\mathbb{T})$  fassen wir auf als periodische Funktionen auf ganz  $\mathbb{R}$ , indem wir diese periodisch über das Intervall  $\mathbb{T}$  hinaus fortsetzen. Ihre Werte an den

Abb 3 Eine Funktion in  $C(\mathbb{T})$  und ihre periodische Fortsetzung

Punkten  $-\pi$  und  $\pi$  spielen dabei keine Rolle, da diese eine  $\lambda$ -Nullmenge bilden. Diese periodische Fortsetzung ist natürlich *nicht* quadratintegrierbar!

Den Unterraum aller *stetigen* Funktionen in  $L^2(\mathbb{T})$  bezeichnen wir mit  $C(\mathbb{T})$ . Dies impliziert, dass ihre periodische Fortsetzung ebenfalls stetig ist. Somit muss in diesem Fall  $f(-\pi) = f(\pi)$  gelten.

*Bemerkungen* a. Im Zusammenhang mit periodischen Funktionen bietet das gemittelte Integral den Vorteil, an einigen Stellen skalare Faktoren zu vermeiden. Notwendig ist es jedoch nicht.

b. Statt Funktionen mit Periode  $2\pi$  kann man ebensogut Funktionen mit Periode 1 oder jeder anderen Periode betrachten. Die Theorie bleibt dieselbe.

c. Wir betrachten von nun an Räume *komplexwertiger* Funktionen und Folgen, ohne dies in der Notation hervorzuheben.  $\rightarrow$

Unser Ziel ist es zu zeigen, dass sich jede Funktion in  $L^2(\mathbb{T})$  in eine Fourierreihe *entwickeln* lässt, und zwar *im  $L^2$ -Sinn*. Insbesondere zeigen wir damit, dass sich jede Funktion in  $L^2(\mathbb{T})$  in der  $L^2$ -Norm beliebig gut durch trigonometrische Polynome approximieren lässt.

### ■ Trigonometrische Polynome

Ein reelles *trigonometrisches Polynom* ist eine Funktion der Gestalt

$$f(t) = a_0 + \sum_{1 \leq n \leq N} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

mit reellen Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$ . Wegen  $e^{int} = \cos nt + i \sin nt$  beziehungsweise

$$\cos nt = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2}, \quad \sin nt = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$$

schreibt sich ein solches Polynom kompakter in der komplexen Form

$$f(t) = \sum_{|n| \leq N} c_n e^{int}$$

mit den komplexen Koeffizienten  $c_0 = a_0$  und

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n \geq 1.$$

Ein solches Polynom ist reellwertig für reelle  $t$ , wenn die *Realitätsbedingung*

$$c_{-n} = \bar{c}_n,$$

erfüllt ist. Dies ergibt sich aus dem Vergleich von  $f(t)$  mit

$$\tilde{f}(t) = \sum_{|n| \leq N} \bar{c}_n e^{-int} = \sum_{|n| \leq N} \bar{c}_{-n} e^{int}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wir haben bereits gesehen, dass die Funktionen  $e_n := e^{int}$  bezüglich des gemittelten Skalarproduktes eine orthonormale Familie in  $L^2(\mathbb{T})$  bilden. Um auch deren Vollständigkeit zu zeigen, benötigen wir folgenden

- 21 **Approximationssatz** Die trigonometrischen Polynome liegen bezüglich der Supremumsnorm dicht in  $C(\mathbb{T})$ .  $\times$

Die Aussage dieses Satzes entspricht dem Weierstraßschen Approximationssatz, wenn wir das trigonometrische Adjektiv fallen lassen. Und genau wie jenen beweisen wir diesen durch Faltung einer stetigen Funktion mit einer geeigneten Diracfolge <sub>24.21</sub>.

- 22 **Lemma** In  $C(\mathbb{T})$  existiert eine Diracfolge aus trigonometrischen Polynomen.  $\times$

⟨⟨⟨⟨ Setze

$$T_n(t) = c_n \left( \frac{1 + \cos t}{2} \right)^n, \quad n \geq 1,$$

mit  $c_n > 0$  so, dass

$$\int_{\mathbb{T}} T_n dt = 1, \quad n \geq 1.$$

Offensichtlich sind dies normierte, nichtnegative trigonometrische Polynome. Bleibt zu zeigen, dass sie außerhalb jeder Umgebung von 0 gleichmäßig gegen Null konvergieren.

Wegen der Symmetrie von  $T_n$  gilt

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{T}} T_n(t) dt = \frac{c_n}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{1 + \cos t}{2} \right)^n dt \\ &> \frac{c_n}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{1 + \cos t}{2} \right)^n \sin t dt \\ &= -\frac{2c_n}{(n+1)\pi} \left( \frac{1 + \cos t}{2} \right)^{n+1} \Big|_0^\pi = \frac{2c_n}{(n+1)\pi}. \end{aligned}$$

Also ist

$$c_n < (n+1)\pi/2.$$

Da  $T_n$  gerade ist und auf  $[0, \pi]$  monoton fällt, folgt für  $\delta \leq |t| \leq \pi$

$$T_n(t) \leq T_n(\delta) \leq \frac{(n+1)\pi}{2} \left( \frac{1 + \cos \delta}{2} \right)^n.$$

Wegen  $\cos \delta < 1$  strebt dies für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null. Also gilt auch

$$\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} T_n(t) dt \Rightarrow 0. \quad \gggg$$

⟨⟨⟨⟨ *Beweis des Approximationssatzes* Sei  $(T_n)$  die Diracfolge des vorangehenden Lemmas 22. Für  $f \in C(\mathbb{T})$  sei dann

$$f_n = f * T_n = \int_{\mathbb{T}} f(s) T_n(\cdot - s) ds$$

Mit  $T_n = \sum_{|m| \leq n} c_m e^{imt}$  wird

$$f_n(t) = \sum_{|m| \leq n} \int_{\mathbb{T}} c_m f(s) e^{im(t-s)} ds = \sum_{|m| \leq n} c'_m e^{imt}$$

mit den Koeffizienten

$$c'_m = c_m \int_{\mathbb{T}} f(s) e^{-ims} ds.$$

Aufgrund der Periodizität und Stetigkeit von  $f$  gilt außerdem 24.24

$$\|f_n - f\|_{\infty} = \|f * T_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Somit liegen die trigonometrischen Polynome dicht in  $C(\mathbb{T})$ . ⟩⟩⟩⟩

23 **Satz** Die Familie  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  bildet eine orthonormale Basis von  $L^2(\mathbb{T})$ . ✕

⟨⟨⟨⟨ Die endlichen Linearkombinationen der  $e_n$  sind gerade die trigonometrischen Polynome, und diese sind dicht in  $C(\mathbb{T})$  bezüglich der Supremumsnorm 21. Da  $C(\mathbb{T})$  wiederum dicht in  $L^2(\mathbb{T})$  bezüglich der  $L^2$ -Norm liegt und

$$\|f - p\|_2 \leq \|f - \varphi\|_2 + \|\varphi - p\|_{\infty}, \quad \varphi \in C(\mathbb{T}),$$

gilt, liegen die endlichen Linearkombinationen der  $e_n$  ebenfalls dicht in  $L^2(\mathbb{T})$ . Also ist diese Familie vollständig 18. ⟩⟩⟩⟩

#### ■ Fourierreihen

Die Fourierkoeffizienten einer Funktion  $f \in L^2(\mathbb{T})$  bezüglich  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  sind

$$\hat{f}_n = \langle f, e_n \rangle = \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Die Folge dieser Koeffizienten,

$$\hat{f} = (\hat{f}_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}),$$

heißt die *diskrete Fouriertransformierte* von  $f$ . Wir formulieren die vorangehenden allgemeinen Ergebnisse noch einmal für diesen wichtigen Spezialfall.

**24 Satz** *Die diskrete Fouriertransformation*

$$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \quad f \mapsto \hat{f} = (\hat{f}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

definiert einen isometrischen Isomorphismus des Hilbertraums  $L^2(\mathbb{T})$  auf den Hilbertraum  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Zu jeder Folge  $\phi \in \ell^2(\mathbb{Z})$  existiert also eine eindeutige Funktion  $f \in L^2(\mathbb{T})$  mit  $\hat{f} = \phi$ , und es gilt

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2}. \quad \times$$

Insbesondere verschwindet eine  $L^2$ -Funktion  $f$  fast überall genau dann, wenn alle ihre Fourierkoeffizienten  $\hat{f}_n$  verschwinden.

Aufgrund dieses Satzes ist jede Funktion in  $L^2(\mathbb{T})$  durch ihre Fourierreihe im  $L^2$ -Sinn darstellbar. Denn setzen wir

$$s_m = s_m(f) = \sum_{|n| \leq m} \hat{f}_n e_n = \sum_{|n| \leq m} \hat{f}_n e^{int},$$

so folgt aus der Parsevalschen Gleichung

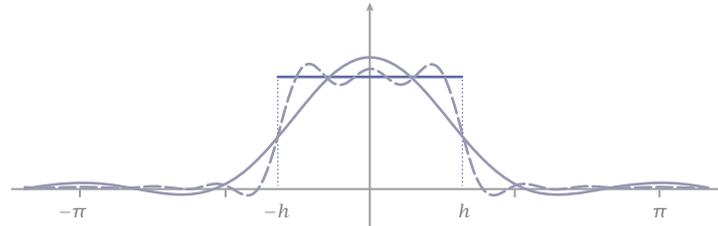
$$\|f - s_m\|_2^2 = \|\hat{f} - \hat{s}_m\|_2^2 = \sum_{|n| > m} |\hat{f}_n|^2 \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Hierfür schreibt man

$$f \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{int}$$

und nennt die Summe auf der rechten Seite die *Fourierreihe* von  $f$ . Diese ist als der  $L^2$ -Limes der symmetrischen Partialsummen  $s_m$  zu verstehen.

Das Gleichheitszeichen kann man hier *nicht* setzen, denn Konvergenz in  $L^2$  bedeutet ja keineswegs Konvergenz in irgendeinem Punkt. Tatsächlich ist die Frage nach der *punktweisen* Konvergenz einer Fourierreihe zum Teil sehr schwierig, und wir werden nur einige elementare Ergebnisse in dieser Richtung beschreiben. Aber zumindest in einem *Hilbertraum* ist die Frage der Entwickelbarkeit in eine Fourierreihe, oder allgemeiner die Darstellung bezüglich einer orthonormalen Basis, vollständig beantwortet.

Abb 4 Rechteckimpuls  $\chi_h$  mit Fourierpolynomen  $s_3$  und  $s_9$ 

### ■ Sin- und Cos-Reihen

Für reelle Funktionen ist es gelegentlich praktischer, Entwicklungen nach Cosinus- und Sinusfunktionen zu betrachten. Aufgrund der Eulerschen Formel  $e^{int} = \cos nt + i \sin nt$  gibt es auch eine Darstellung

$$f \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt).$$

Multipliziert man diese Darstellung mit  $\cos nt$  respektive  $\sin nt$  und integriert über  $\mathbb{T}$ , so erhält man direkt

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt,$$

für  $n \geq 0$  respektive  $n \geq 1$ , genannt die *Fourier-Cosinus-* und *Fourier-Sinuskoeffizienten* von  $f$ .

Die verschiedenen Darstellungen der klassischen Fourierreihe haben ihre jeweiligen Vorteile. Die Exponentialreihe ist kompakter und rechnerisch leichter zu handhaben. Die sin- und cos-Reihen haben den Vorteil, dass die Koeffizienten reeller Funktionen ebenfalls reell sind. Ist eine Funktion zudem *gerade*, also  $f(-t) = f(t)$ , so ist ihre Fourierreihe wegen  $\langle f, \sin nt \rangle = 0$  für alle  $n \geq 1$  eine *Cosinusreihe*. Ist eine Funktion *ungerade*, also  $f(-t) = -f(t)$ , so ist ihre Fourierreihe wegen  $\langle f, \cos nt \rangle = 0$  für alle  $n \geq 0$  eine *Sinusreihe*. Umgekehrt repräsentieren die Cosinus- und Sinusreihen den geraden und ungeraden Anteil einer beliebigen  $L^2$ -Funktion A-23.

► **Rechteckfunktion** Für  $0 < h < \pi$  sei  $\rho_h$  die  $2\pi$ -periodische Fortsetzung der charakteristischen Funktion von  $[-h, h]$ . Dann ist  $\rho_h$  gerade, und seine Fourierreihe eine Cosinusreihe mit Koeffizienten

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_h(t) \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^h \cos nt \, dt \\ &= \frac{2}{\pi n} \sin nt \Big|_0^h = \frac{2}{n\pi} \sin nh, \quad n \geq 1,\end{aligned}$$

und

$$\alpha_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^h dt = \frac{2h}{\pi} = \lim_{n \rightarrow 0} \alpha_n.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\rho_h &\sim \frac{h}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin nh}{n} \cos nt \\ &= \frac{h}{\pi} \left( 1 + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{\sin nh}{nh} \cos nt \right) = \frac{h}{\pi} \left( 1 + \sum_{n \neq 0} \frac{\sin nh}{nh} e^{int} \right). \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

25  $\blacktriangleright$  **Sprungfunktion** Die  $2\pi$ -periodische Funktion  $\sigma$  sei bestimmt durch

$$\sigma(0) = 0, \quad \sigma(t) = \frac{1}{2}(\pi - t), \quad 0 < t < 2\pi.$$

Dann ist  $\sigma$  ungerade, und seine Fourierreihe eine Sinusreihe mit Koeffizienten

$$\begin{aligned}\beta_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma(t) \sin nt \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\pi - t) \sin nt \, dt \\ &= -\frac{1}{n\pi}(\pi - t) \cos nt \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos nt \, dt = \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

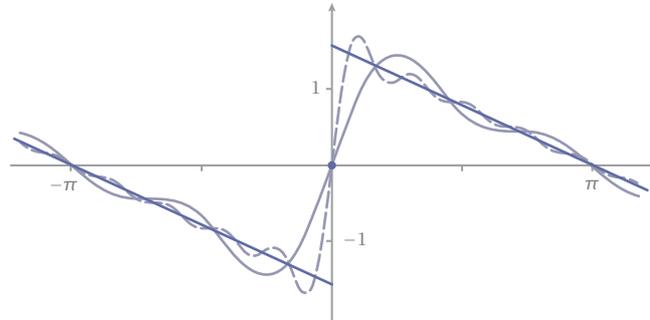
Also ist

$$\sigma \sim \sum_{n \geq 1} \frac{\sin nt}{n} = \sum_{n \neq 0} \frac{e^{int}}{2in}. \quad \blacktriangleleft$$

## 25.4 Fourierkoeffizienten

Die Fourierkoeffizienten bezüglich der orthonormalen Basis  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  wie auch der Cosinus- und Sinusbasis sind nicht nur für Funktionen in  $L^2(\mathbb{T})$  erklärt, sondern ebenso für Funktionen in  $L^1(\mathbb{T})$ . Wir betrachten daher jetzt allgemeiner Fourierkoeffizienten und -reihen für Funktionen  $f \in L^1(\mathbb{T})$ . Wegen

$$L^p(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T}), \quad 1 < p \leq \infty,$$

Abb 5 Sprungfunktion  $\sigma$  mit Fourierpolynomen  $s_3$  und  $s_9$ 

beinhaltet dieser Raum sowohl den Hilbertraum  $L^2(\mathbb{T})$  als auch alle anderen  $L^p$ -Räume, ist aber selber natürlich *kein* Hilbertraum.

Zunächst eine einfache Ungleichung, wobei  $\Delta_h f$  wieder definiert sei durch  $(\Delta_h f)(t) := f(t+h) - f(t)$ .

26 **Lemma** Für die Fourierkoeffizienten einer Funktion  $f \in L^1(\mathbb{T})$  gilt

$$|\hat{f}_n| \leq \frac{1}{2} \|\Delta_{\pi/n} f\|_1. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Mit der Substitution  $t \mapsto t + \pi/n$  und  $e^{-i\pi} = -1$  ist

$$\hat{f}_n = \int f(t) e^{-int} dt = - \int f(t + \pi/n) e^{-int} dt$$

aufgrund der Periodizität des Integranden. Also gilt auch

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2} \int (f(t) - f(t + \pi/n)) e^{-int} dt = -\frac{1}{2} \int \Delta_{\pi/n} f(t) e^{-int} dt,$$

woraus die Behauptung folgt. ⟩⟩⟩

Eine unmittelbare Konsequenz 24.8 ist das

27 **Riemann-Lebesgue-Lemma** Die Fourierkoeffizienten einer Funktion  $f \in L^1(\mathbb{T})$  bilden eine Nullfolge.  $\times$

Die diskrete Fouriertransformation bildet somit  $L^1(\mathbb{T})$  in den Raum  $c_0$  der doppelt-unendlichen komplexen Nullfolgen ab. Diese Abbildung ist linear und stetig bezüglich der Supremumsnorm, denn

$$\|\hat{f}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n| = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, e_n \rangle| \leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|f\|_1 \|e_n\|_\infty = \|f\|_1.$$

Sie ist auch offensichtlich injektiv. Sie ist jedoch *nicht surjektiv*:

28 **Satz** Die diskrete Fouriertransformation

$$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{T}) \rightarrow c_0, \quad f \mapsto \hat{f}$$

ist linear, stetig und injektiv, aber nicht surjektiv.  $\times$

Der Beweis beruht auf folgendem Satz der Funktionalanalysis, den wir am Ende dieses Kapitels beweisen <sup>55</sup>.

29 **Satz von der offenen Abbildung** Sind  $E$  und  $F$  Banachräume und die lineare Abbildung  $\Lambda: E \rightarrow F$  bijektiv und stetig, so ist auch  $\Lambda^{-1}$  stetig.  $\times$

««« *Beweis der Nicht-Surjektivität* Wäre  $\mathcal{F}$  surjektiv, so wäre nach dem Satz von der offenen Abbildung  $\mathcal{F}^{-1}$  stetig, also  $\|\mathcal{F}^{-1}\hat{f}\|_1 \leq c \|\hat{f}\|_\infty$ . Es gäbe also ein  $\delta > 0$ , so dass

$$\|\hat{f}\|_\infty \geq \delta \|f\|_1, \quad f \in L^1(\mathbb{T}).$$

Die sogenannten *Dirichletkerne*  $D_n$  mit

$$D_n(t) = \sum_{|k| \leq n} e^{ikt} = \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2},$$

denen wir später noch begegnen werden <sup>36</sup>, sind aber in  $L^1(\mathbb{T})$ , und es gilt <sup>A-24</sup>

$$\|\hat{D}_n\|_\infty = 1, \quad \|D_n\|_1 \rightarrow \infty.$$

Also kann  $\mathcal{F}$  nicht surjektiv sein. »»»

Das Riemann-Lebesgue-Lemma sagt aus, dass die Fourierkoeffizienten einer  $L^1$ -Funktion gegen Null konvergieren – aber mehr nicht. Um weitere Aussagen über die Geschwindigkeit dieser Konvergenz zu machen, benötigen wir weitere Regularitätseigenschaften der Funktion. Die beiden folgenden Sätze geben hierfür Beispiele. — Zunächst eine allgemeine Definition.

**Definition** Eine Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *hölderstetig* mit Exponent  $\alpha \in (0, 1]$ , oder kurz  *$\alpha$ -hölderstetig*, falls es eine Konstante  $L$  gibt, so dass

$$|f(u) - f(v)| \leq L |u - v|^\alpha \tag{1}$$

für alle  $u$  und  $v$  im Definitionsbereich von  $f$ .  $\times$

Die bestmögliche Hölderkonstante auf einem Definitionsbereich  $\Omega$  ist

$$[f]_\alpha := \sup_{u \neq v \in \Omega} \frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|^\alpha}.$$

Jede hölderstetige Funktion ist stetig, und 1-hölderstetig ist gleichbedeutend mit Lipschitzstetig. Der Raum der  $\alpha$ -hölderstetigen Funktionen auf  $\Omega$  wird oft mit  $C^{0,\alpha}(\Omega)$  bezeichnet.

- ▶ A. Eine  $\alpha$ -hölderstetige Funktion auf  $\mathbb{R}$  mit  $\alpha > 1$  ist konstant.  
 B. Sei  $0 < \sigma \leq 1$ . Dann ist

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto |t|^\sigma$$

$\alpha$ -hölderstetig für  $0 < \alpha \leq \sigma$ , aber nicht für  $\sigma < \alpha \leq 1$ .

- C. Für jedes Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  gilt

$$C^1(\Omega) \subsetneq C^{0,\alpha}(\Omega) \subsetneq C^{0,\beta}(\Omega) \subsetneq C^0(\Omega), \quad 0 < \beta < \alpha \leq 1. \quad \blacktriangleleft$$

30 **Satz** Für  $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$  gilt

$$|\hat{f}_n| \leq \frac{2}{|n|^\alpha} [f]_\alpha, \quad n \neq 0. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Dies folgt aus 26

$$|\hat{f}_n| \leq \frac{1}{2} \|\Delta_{\pi/n} f\|_1 \leq \frac{1}{2} \frac{\pi^\alpha}{n^\alpha} [f]_\alpha. \quad \rangle\rangle\rangle$$

Bei differenzierbaren Funktionen spiegelt sich der Grad der Differenzierbarkeit direkt im asymptotischen Verhalten ihrer Fourierkoeffizienten:

31 **Satz** Für  $f \in C^1(\mathbb{T})$  gilt

$$|\hat{f}_n| \leq \frac{1}{|n|} \|f'\|_1, \quad n \neq 0.$$

Allgemeiner gilt für  $f \in C^r(\mathbb{T})$  mit  $1 \leq r < \infty$  die Abschätzung

$$|\hat{f}_n| \leq \frac{1}{|n|^r} \|f^{(r)}\|_1, \quad n \neq 0. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Mit partieller Integration erhalten wir

$$\hat{f}_n = \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{in} \int_{\mathbb{T}} f'(t) e^{-int} dt, \quad n \neq 0,$$

da sich die Randterme aufgrund ihrer Periodizität aufheben. Daraus folgt

$$|\hat{f}_n| \leq \frac{1}{|n|} \int_{\mathbb{T}} |f'(t)| dt = \frac{1}{|n|} \|f'\|_1.$$

Ist  $f \in C^r(\mathbb{T})$ , so erhält man mit  $r$ -maliger partieller Integration

$$\hat{f}_n = \frac{1}{(in)^r} \int_{\mathbb{T}} f^{(r)}(t) e^{-int} dt,$$

und damit das allgemeine Ergebnis. ⟩⟩⟩⟩

Die Umkehrung dieses Satzes gilt *nicht*. Für die Sprungfunktion  $\sigma$  25 gilt

$$|\hat{\sigma}_n| = \frac{1}{n}, \quad n \neq 0,$$

sie ist aber *nicht* stetig differenzierbar.

**Bemerkung** Diese Ergebnisse lassen sich kombinieren. Sei dazu

$$C^{r,\alpha}(\mathbb{T}) = \{f \in C^r(\mathbb{T}) : f^{(r)} \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})\}.$$

Für  $f \in C^{r,\alpha}(\mathbb{T})$  gilt dann

$$|\hat{f}_n| \leq \frac{2}{|n|^{r+\alpha}} [f^{(r)}]_\alpha, \quad n \neq 0. \quad \rightarrow$$

## 25.5

### Gleichmäßige & Punktweise Konvergenz

Für eine Funktion  $f \in L^1(\mathbb{T})$  heißen

$$s_n f := \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k e^{ikt}, \quad Sf := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ikt},$$

das  $n$ -te *Fourierpolynom* respektive die *Fourierreihe* von  $f$ . Letztere ist zu verstehen als die *Folge*  $(s_n f)$  der Fourierpolynome von  $f$ , unabhängig von der Frage ihrer Konvergenz in einzelnen Punkten. *Konvergiert* diese Folge in einem Punkt  $t$ , so steht die Reihe auch für deren Grenzwert, also

$$Sf(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n f(t).$$

Dies entspricht der Konvention für Zahlenreihen. — Zunächst eine einfache Beobachtung.

- 32 **Satz** *Ist die periodische Funktion  $f$  stetig und konvergiert ihre Fourierreihe  $Sf$  gleichmäßig, so gilt  $f = Sf$ . ✕*

⟨⟨⟨ Sei  $\varphi = \lim s_n f$  der gleichmäßige Limes der Fourierreihe von  $f$ . Dann ist  $\varphi$  stetig, und aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz gilt

$$\hat{\varphi}_n = \int_{\mathbb{T}} \varphi(t) e^{-int} dt = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} s_m f(t) e^{-int} dt = \hat{f}_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Aufgrund des Eindeutigkeitsatzes <sup>24</sup> ist also  $\varphi =_\lambda f$ . Da aber beide Funktionen stetig sind, folgt hieraus  $\varphi = f$ . ⟩⟩⟩

**Bemerkung** Für *Taylorpolynome* gilt etwas Analoges *nicht*. Denn es gibt  $C^\infty$ -Funktionen, deren Taylorreihe gleichmäßig konvergiert, ja sogar identisch verschwindet, die aber nicht die Funktion darstellt <sup>10.21</sup>. →

### ■ Gleichmäßige Konvergenz

Wir zeigen nun, dass die Fourierreihe einer stetig differenzierbaren Funktion  $f$  *gleichmäßig* gegen  $f$  konvergiert. Tatsächlich genügt es sogar, dass  $f$  absolut stetig ist. Um dies hier nicht im Detail definieren zu müssen, fordern wir der Einfachheit halber, dass  $f$  Stammfunktion einer integrierbaren Funktion  $g$  ist, also geschrieben werden kann als

$$f(t) = c + \int_0^t g(s) \, ds, \quad g \in L^1(\mathbb{T}).$$

Eine solche Funktion ist natürlich stetig, denn

$$|f(s) - f(t)| \leq \int_s^t |g| \leq \int_{\mathbb{T}} \chi_{[s,t]} |g|, \quad s < t,$$

und dies verschwindet für  $s \rightarrow t$  aufgrund der dominierten Konvergenz.

- 33 **Lemma** *Ist die periodische Funktion  $f$  Stammfunktion einer  $L^1$ -Funktion  $g$ , so gilt*

$$\hat{f}_n = \frac{\hat{g}_n}{in}, \quad n \neq 0,$$

sowie  $\hat{g}_0 = 0$ .  $\times$

⟨⟨⟨ Aus der Integraldarstellung und der Periodizität von  $f$  folgt

$$\hat{g}_0 = \int_{\mathbb{T}} g(t) \, dt = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi} = 0.$$

Für  $n \neq 0$  erhalten wir

$$\hat{f}_n = \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} \, dt = \int_{\mathbb{T}} \left\{ \int_{\{s \leq t\}} g(s) \, ds \right\} e^{-int} \, dt,$$

da das Integral über  $ce^{-int}$  verschwindet. Vertauschen der Integrationsreihenfolge mit Fubini ergibt A-26

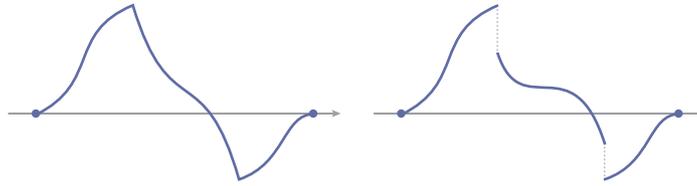
$$\hat{f}_n = \int_{\mathbb{T}} \left\{ \int_{\{t \geq s\}} e^{-int} \, dt \right\} g(s) \, ds = \frac{1}{in} \int_{\mathbb{T}} g(s) (e^{-ins} - e^{-in\pi}) \, ds.$$

Da das Integral über  $ge^{-in\pi}$  wegen  $\hat{g}_0 = 0$  verschwindet, erhalten wir

$$\hat{f}_n = \frac{1}{in} \int_{\mathbb{T}} g(s) e^{-ins} \, ds = \frac{\hat{g}_n}{in}. \quad \gggg$$

- 34 **Satz** *Ist die periodische Funktion  $f$  Stammfunktion einer  $L^2$ -Funktion  $g$ , so konvergiert ihre Fourierreihe  $Sf$  absolut und gleichmäßig gegen  $f$ .  $\times$*

Abb 6 Stetige und unstetige, stückweise stetig differenzierbare Funktion



«««« Wegen  $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$  können wir das vorangehende Lemma anwenden. Es gilt also  $\hat{f}_n = \hat{g}_n/in$  für  $n \neq 0$ . Mit Cauchy-Schwarz folgt

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n e^{int}| \leq |\hat{f}_0| + \sum_{n \neq 0} \frac{|\hat{g}_n|}{|n|} \leq |\hat{f}_0| + \left( \sum_{n \neq 0} |\hat{g}_n|^2 \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} < \infty$$

Somit konvergieren die Partialsummen  $s_n f$  absolut und gleichmäßig auf ganz  $\mathbb{T}$ . Aufgrund des letzten Satzes <sub>32</sub> konvergiert damit  $Sf$  gleichmäßig gegen  $f$ . »»»»

Ein typischer Anwendungsfall sind periodische Funktionen, die *stückweise stetig differenzierbar* sind. Das heißt, es gibt eine Zerlegung  $(t_0, \dots, t_n)$  von  $\mathbb{T}$ , so dass die Einschränkungen  $f|_{(t_{k-1}, t_k)}$  für alle  $1 \leq k \leq n$  stetig differenzierbar sind und die einseitigen Grenzwerte von  $f$  und  $f'$  in den Teilungspunkten existieren. Sind diese Funktionen auch noch stetig, so gilt folgendes

- 35 **Korollar** Die Fourierreihe einer stetigen, stückweise stetig differenzierbaren periodischen Funktion konvergiert absolut und gleichmäßig gegen die Funktion.  $\times$

Später betrachten wir auch noch unstetige, stückweise stetig differenzierbare periodische Funktionen <sub>40</sub> sowie den Fall einer Stammfunktion einer lediglich integrierbaren Funktion  $g$  <sub>46</sub>.

#### ■ Dirichletkerne

Um punktweise, nicht notwendigerweise gleichmäßige Konvergenz zu untersuchen, stellen wir die Fourierpolynome  $s_n f$  in Integralform dar. Dazu definieren wir die *Faltung*  $f * g$  zweier periodischer Funktionen durch

$$(f * g)(t) := \int_{\mathbb{T}} f(s)g(t-s) ds.$$

Für  $f \in L^1(\mathbb{T})$  und  $g \in L^\infty(\mathbb{T})$  ist  $f * g$  in jedem Punkt wohldefiniert.

36 **Lemma** Für alle  $n \geq 0$  gilt

$$s_n f = f * D_n$$

mit den *Dirichletkernen*

$$D_n = \sum_{|k| \leq n} e^{ikt} = \frac{\sin((n + 1/2)t)}{\sin(t/2)}.$$

Dies sind gerade Funktionen mit  $\int_{\mathbb{T}} D_n(t) dt = 1$  für  $n \geq 1$ .  $\times$

⟨⟨⟨ Dies ist eine direkte Rechnung:

$$\begin{aligned} s_n f(t) &= \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k e^{ikt} = \sum_{|k| \leq n} e^{ikt} \int_{\mathbb{T}} f(s) e^{-iks} ds \\ &= \int_{\mathbb{T}} f(s) \sum_{|k| \leq n} e^{ik(t-s)} ds \\ &= \int_{\mathbb{T}} f(s) D_n(t-s) ds = (f * D_n)(t) \end{aligned}$$

mit

$$D_n(t) = \sum_{|k| \leq n} e^{ikt}.$$

Die Auswertung dieser geometrischen Summe ergibt die zweite Identität, sowie

$$\int_{\mathbb{T}} D_n(t) dt = \sum_{|k| \leq n} \int_{\mathbb{T}} e^{ikt} dt = \int_{\mathbb{T}} 1 dt = 1. \quad \rangle\rangle\rangle$$

Die Dirichletkerne bilden übrigens *keine Diracfolge*, da sie nicht die Konzentrationseigenschaft (D-2) besitzen und auch das Vorzeichen wechseln.

37 **Lemma** Für eine integrierbare  $2\pi$ -periodische Funktion  $f$  gilt in jedem Punkt

$$(s_n f - f)(x) = \int_{\mathbb{T}} \omega_x f(t) D_n(t) dt$$

mit

$$\omega_x f(t) := \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - f(x). \quad \times$$

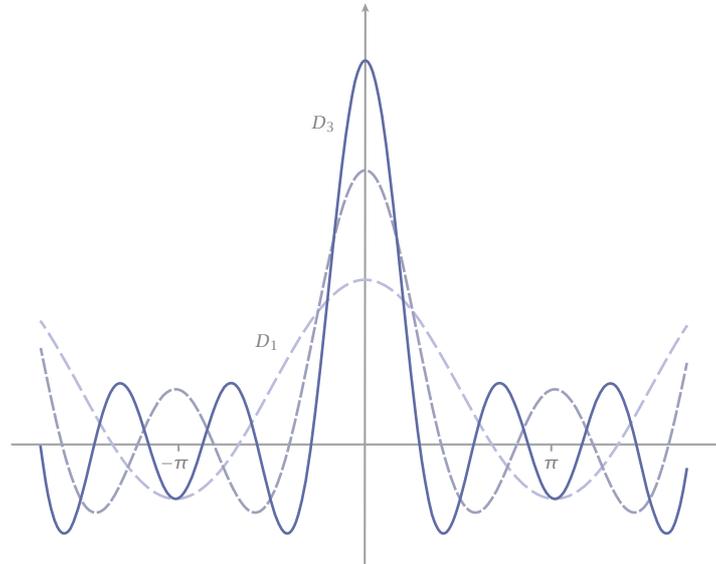
⟨⟨⟨ Aufgrund des vorangehenden Lemmas und  $D_n(t) = D_n(-t)$  ist

$$s_n f(x) = (f * D_n)(x) = \int f(x-t) D_n(t) dt = \int f(x+t) D_n(t) dt$$

und

$$f(x) = \int f(x) D_n(t) dt.$$

Nehmen wir die halbe Summe der ersten beiden Integrale und subtrahieren das dritte Integral, so erhalten wir die Behauptung.  $\rangle\rangle\rangle$

Abb 7 Die Dirichletkerne  $D_1$ ,  $D_2$  und  $D_3$ 

#### ■ Punktweise Konvergenz

Es gilt *nicht*, dass die Fourierreihe einer stetigen Funktion in jedem Punkt gegen diese Funktion konvergiert – siehe letzter Abschnitt. Jedoch konvergiert sie in solchen Stetigkeitspunkten, die eine gewisse zusätzliche Regularität besitzen. Mit der Funktion  $\omega_x f$  des vorangehenden Lemmas gilt folgendes

38 **Kriterium von Dini** Sei  $f \in L^1(\mathbb{T})$  und  $x \in \mathbb{T}$ . Gilt

$$\int_0^\pi \frac{|\omega_x f(t)|}{t} dt < \infty,$$

so konvergiert die Fourierreihe von  $f$  im Punkt  $x$  gegen  $f(x)$ .  $\times$

⟨⟨⟨ Es ist  $\sin((n+1/2)t) = \cos nt \sin t/2 + \sin nt \cos t/2$ . Mit dem letzten Lemma <sub>37</sub> und der Definition der  $D_n$  <sub>36</sub> folgt daher

$$\begin{aligned} (s_n f - f)(x) &= \int \omega_x f(t) \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} dt \\ &= \int \phi_1 \cos nt dt + \int \phi_2 \sin nt dt \end{aligned}$$

mit

$$\phi_1 = \omega_x f(t), \quad \phi_2 = \omega_x f(t) \frac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)}.$$

Diese Funktionen sind aufgrund der Voraussetzung des Kriteriums *integrierbar*. Aufgrund des Riemann-Lebesgue-Lemmas<sub>27</sub> konvergieren daher die letzten beiden Integrale für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null. Dies ergibt die Behauptung.  $\gggg$

*Bemerkung* Dieses Kriterium betrifft effektiv nur das Verhalten der Funktion  $f$  lokal um den Punkt  $x$ . Es kann auch nur von *einem* Funktionswert  $f(x)$  erfüllt werden. Dieser ist in diesem Fall somit auch für  $f \in L^1(\mathbb{T})$  fixiert.  $\rightarrow$

$\triangleright$  A. Das Kriterium ist erfüllt in jedem Punkt  $x$ , in dem  $f$  differenzierbar ist. Denn dann ist  $f(x+t) = f(x) + f'(x)t + o(t)$ , und man erhält

$$\omega_x f(t) = \frac{o(t)}{t} = O(1).$$

B. Das Kriterium gilt ebenfalls in jedem Punkt, in dem  $f$  hölderstetig ist.

C. Für die Sprungfunktion  $\sigma$ <sub>25</sub> verschwindet  $\omega_x \sigma$  für jedes  $x$  in einer Umgebung von  $t = 0$ . Ihre Fourierreihe konvergiert daher überall gegen  $\sigma$ . Wegen der Unstetigkeit von  $\sigma$  ist die Konvergenz natürlich *nicht gleichmäßig*.

D. Das Gleiche gilt für die Rechteckfunktion  $\chi_h$  mit Ausnahme der beiden Unstetigkeitspunkte in  $-h$  und  $h$ .  $\blacktriangleleft$

Das Kriterium von Dini lässt sich auf Sprungstellen verallgemeinern. Eine in einer punktierten Umgebung einer reellen Zahl  $x$  definierte Funktion  $f$  besitzt in  $x$  eine *Sprungstelle*, wenn dort ihre einseitigen Grenzwerte  $f_{\pm}(x)$  existieren.

**39 Zusatz zum Kriterium von Dini** Sei  $f \in L^1(\mathbb{T})$ . Besitzt  $f$  in  $x$  eine Sprungstelle und gilt

$$\int_0^\pi \frac{|f(x+t) - f_+(x)| + |f(x-t) - f_-(x)|}{t} dt < \infty,$$

so konvergiert die Fourierreihe von  $f$  im Punkt  $x$  gegen die *Sprungmitte*

$$f_m(x) := \frac{f_+(x) + f_-(x)}{2}. \quad \times$$

$\lllll$  Definieren wir die Funktion  $f$  im Punkt  $x$  um zu

$$f(x) := f_m(x),$$

so erfüllt diese Funktion das Kriterium von Dini<sub>38</sub>, und wir sind fertig.  $\gggg$

#### ■ Gleichmäßige und punktweise Konvergenz

Mithilfe der Darstellung von  $s_n f - f$ <sub>37</sub> lässt sich zeigen, dass die Fourierreihe der Sprungfunktion auf jedem kompakten Stetigkeitsintervall sogar *gleichmäßig* konvergiert<sub>A-34</sub>.

- 40 **Satz** Ist die – nicht notwendig stetige – periodische Funktion  $f$  stückweise stetig differenzierbar, so konvergiert ihre Fourierreihe auf jedem kompakten Stetigkeitsintervall von  $f$  gleichmäßig gegen  $f$  und in den Sprungstellen punktweise gegen die Sprungmitte von  $f$ . ✕

⟨⟨⟨ Seien  $x_1, \dots, x_n$  die Sprungstellen von  $f$  und  $h_1, \dots, h_n$  ihre jeweiligen Sprunghöhen. Dann ist die Hilfsfunktion  $\phi$  mit

$$\phi(t) = f(t) - \sum_{i=1}^n h_i \sigma(t - x_i)$$

stetig und stückweise stetig differenzierbar. Die Fourierreihe von  $\phi$  konvergiert daher absolut und gleichmäßig auf ganz  $\mathbb{T}$ <sub>35</sub>. Da die Fourierreihen der Sprungfunktionen auf jedem kompakten Stetigkeitsintervall von  $f$  gleichmäßig konvergieren <sub>A-34</sub>, gilt dies dann auch für die Fourierreihe der Funktion  $f$  selbst. Die Aussage über das Verhalten in den Sprungstellen folgt direkt aus dem Zusatz zum Dirichletschen Kriterium. ⟩⟩⟩

#### ■ Der Satz von Carleson

Die bisherigen Sätze gelten für stetige Funktionen, die gewisse Regularitätseigenschaften aufweisen. Die Frage, was für »nur stetige« Funktionen gilt, beantwortet der folgende, tief liegende

- 41 **Satz von Carleson** Ist die periodische Funktion  $f$  stetig, so wird sie fast überall durch ihre Fourierreihe dargestellt. ✕

Dieser Satz kann nicht verbessert werden, wie wir im letzten Abschnitt sehen werden.

## 25.6

### Gemittelte Konvergenz

Das im Allgemeinen schwierige Problem der punktweisen Konvergenz einer Fourierreihe kann man umgehen, indem man nicht die Fourierpolynome selbst, sondern geeignete Mittel hiervon betrachtet. Ausgangspunkt ist die folgende Bemerkung <sub>A-5,21</sub>. Ist  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine konvergente Folge komplexer Zahlen mit Grenzwert  $a$ , so konvergieren auch ihre arithmetischen Mittel gegen denselben Grenzwert, also

$$\sigma_n := \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \rightarrow a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Die Mittel können aber auch konvergieren, wenn die Folge selbst *nicht* konvergiert, wie das einfache Beispiel  $((-1)^n)_{n \geq 1}$  zeigt. Die Mittelung kann also zu einem verbesserten Konvergenzverhalten führen.

Wir betrachten deshalb jetzt die arithmetischen Mittel

$$\sigma_n f := \frac{1}{n}(s_0 f + \dots + s_{n-1} f), \quad n \geq 1,$$

der Fourierpolynome von  $f$ . Diese werden *Fejérpolynome* genannt.

**42 Lemma** Es ist  $\sigma_n f = f * F_n$  mit den *Fejérkernen*

$$F_n = \frac{1}{n} \left( \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right)^2, \quad n \geq 1. \quad \times$$

««« Wegen  $_{36} s_n f = f * D_n$  ist

$$F_n = \frac{1}{n}(D_0 + \dots + D_{n-1}) = \frac{1}{n} \sum_{0 \leq k < n} \frac{\sin((k+1/2)t)}{\sin(t/2)}.$$

Mit den trigonometrischen Identitäten  $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$  und  $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$  folgt

$$\begin{aligned} n \sin^2(t/2) F_n &= \sum_{0 \leq k < n} \sin((k+1/2)t) \sin(t/2) \\ &= \sum_{0 \leq k < n} \frac{\cos(kt) - \cos((k+1)t)}{2} \\ &= \frac{1 - \cos(nt)}{2} = \sin^2 \frac{nt}{2}. \quad \text{«««} \end{aligned}$$

**43 Lemma** Die Fejérkerne  $F_n$  bilden eine Diracfolge gerader Funktionen mit  $F_n \Rightarrow 0$  außerhalb jeder Umgebung von 0.  $\times$

««« Es ist offensichtlich, dass die  $F_n$  gerade und nichtnegativ sind. Die Mittelwerteigenschaft folgt aus der entsprechenden Eigenschaft  $_{36}$

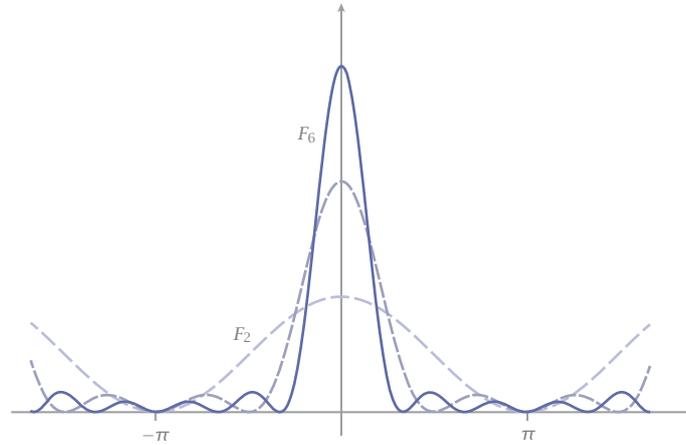
$$\int_{\mathbb{T}} D_n dt = 1, \quad n \geq 1,$$

der Dirichletkerne. Um die letzte Behauptung zu zeigen, sei  $\delta > 0$ . Dann gilt  $\sin(t/2) \geq \sin(\delta/2)$  für  $\delta \leq t \leq \pi$  und deshalb

$$F_n(t) \leq \frac{1}{n \sin^2 \delta/2}, \quad \delta \leq |t| \leq \pi.$$

Also gilt  $F_n \Rightarrow 0$  für  $\delta \leq |t| \leq \pi$ . »»»

Es ist damit klar, dass die Fejérpolynome  $\sigma_n f = f * F_n$  in Stetigkeitspunkten gegen  $f$  konvergieren  $_{24.24}$ . Ebenso konvergieren sie in *Sprungstellen*.

Abb 8 Die Fejérkerne  $F_2$ ,  $F_4$  und  $F_6$ 

- 44 **Satz** Die Fejérpolynome  $\sigma_n f$  einer Funktion  $f \in L^1(\mathbb{T})$  konvergieren auf jedem abgeschlossenen Stetigkeitsintervall von  $f$  gleichmäßig gegen  $f$ . In einer Sprungstelle  $x$  konvergieren sie gegen die Sprungmitte. ✕

⟨⟨⟨ Der erste Teil der Behauptung folgt direkt aus dem allgemeinen Satz über Faltungen mit Diracfamilien 24.24. — Sei nun  $x$  eine Sprungstelle. Aufgrund der Symmetrie der Fejérkerne gilt wie bei den Dirichletkernen 37

$$\begin{aligned} \sigma_n f(x) &= \int_{\mathbb{T}} f(x-t) F_n(t) dt \\ &= \int_{\{t \geq 0\} \cup \{t \leq 0\}} f(x-t) F_n(t) dt \\ &= \int_{\{t \geq 0\}} \{f(x-t) + f(x+t)\} F_n(t) dt \end{aligned}$$

und

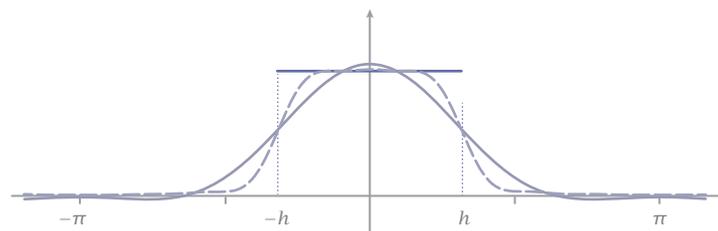
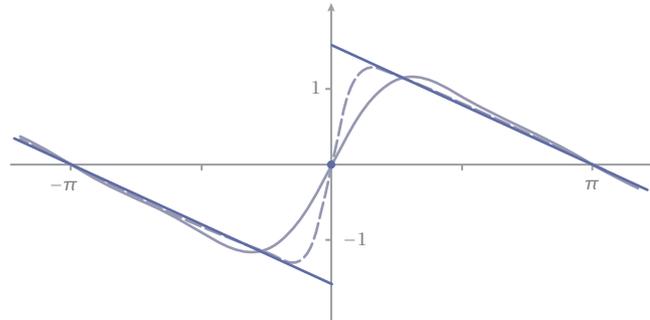
Abb 9 Rechteckimpuls mit Fejérpolynomen  $\sigma_3$  und  $\sigma_9$ 

Abb 10 Sprungfunktion mit Fejérpolynomen  $\sigma_3$  und  $\sigma_9$



$$|\sigma_n f(x) - f_m(x)| \leq \int_{\{t \geq 0\}} |f(x-t) - f_-(x)| F_n(t) dt + \int_{\{t \geq 0\}} |f(x+t) - f_+(x)| F_n(t) dt.$$

Die beiden letzten Integrale konvergieren gegen Null für  $n \rightarrow \infty$ , denn wir können sie auffassen als die Faltung einer im Punkt  $x$  stetigen und dort verschwindenden Funktion mit der Diracfamilie  $F_n$ . »»»

Während also die *Fourierpolynome* stetiger Funktionen im Allgemeinen nur fast überall konvergieren <sub>41</sub>, verhalten sich die *Fejérpolynome* besser:

- 45 **Korollar** Ist die periodische Funktion  $f$  stetig, so konvergieren ihre Fejérpolynome  $\sigma_n f$  gleichmäßig gegen  $f$ . ✕

Wir erhalten aber auch ein besseres Resultat für die Fourierpolynome, wenn die Funktion  $f$  Stammfunktion einer  $L^1$ -Funktion  $g$  ist.

- 46 **Satz** Ist die periodische Funktion  $f$  Stammfunktion einer  $L^1$ -Funktion  $g$ , so konvergieren ihre Fourierpolynome  $s_n f$  punktweise gegen  $f$ . ✕

»»»» Betrachte

$$s_n f(t) = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k e^{ikt}.$$

Für jedes  $t \in \mathbb{T}$  gilt

$$\sigma_n f(t) \rightarrow f(t)$$

aufgrund der Stetigkeit von  $f$  <sub>45</sub>. Ferner ist  $\hat{f}_n = \hat{g}_n / in$  für  $n \neq 0$  <sub>33</sub>, so dass

$$n \hat{f}_n(t) e^{int} = \hat{g}_n(t) e^{int} \rightarrow 0$$

aufgrund des Riemann-Lebesgue-Lemmas <sup>27</sup>. Aufgrund des folgenden Lemmas <sup>47</sup> konvergiert dann auch  $s_n f(t)$ , und es gilt

$$Sf(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n f(t) = f(t)$$

für jedes  $t \in \mathbb{T}$ .  $\gggg$

- 47 Lemma** *Konvergieren die arithmetischen Mittel einer Zahlenreihe  $\sum_{n \geq 0} a_n$  gegen den Grenzwert  $s$  und gilt  $na_n \rightarrow 0$ , so konvergiert auch die Reihe selbst gegen denselben Grenzwert  $s$ .  $\times$*

$\llll$  Mit  $s_n = \sum_{0 \leq k < n} a_k$  und

$$\begin{aligned} n\sigma_n &:= s_0 + \dots + s_{n-1} \\ &= na_0 + (n-1)a_1 + \dots + a_{n-1} = \sum_{0 \leq k < n} (n-k)a_k \end{aligned}$$

wird

$$n(s_n - \sigma_n) = \sum_{0 \leq k < n} na_k - \sum_{1 \leq k \leq n} (n-k)a_k = \sum_{0 \leq k < n} ka_k.$$

Also sind  $s_n - \sigma_n$  gerade die arithmetischen Mittel der Folge  $(ka_k)$ . Konvergiert diese Folge gegen Null, so konvergieren auch deren arithmetische Mittel gegen Null <sup>A-5.21</sup>. Also gilt  $s_n - \sigma_n \rightarrow 0$ , und das ist die Behauptung.  $\gggg$

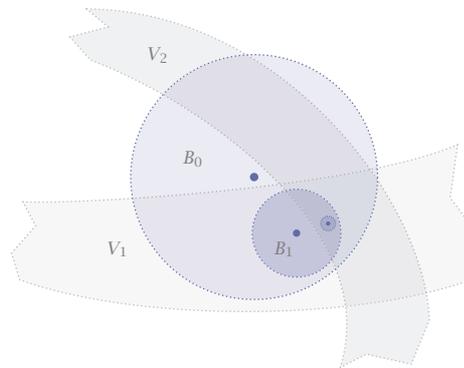
## 25.7 Divergenz

Ist eine periodische Funktion  $f$  stetig, so konvergiert nach dem Satz von Carleson ihre Fourierreihe  $Sf$  fast überall gegen  $f$  <sup>41</sup>. Ist sie sogar Stammfunktion einer  $L^1$ -Funktion  $g$ , so konvergiert  $Sf$  punktweise gegen  $f$  <sup>46</sup>. Und ist  $g$  sogar  $L^2$ , so konvergiert  $Sf$  gleichmäßig gegen  $f$  <sup>34</sup>.

Jetzt zeigen wir noch, dass für »nur stetige« Funktionen die Divergenz ihrer Fourierreihe in einer überabzählbaren, dichten Teilmenge von Punkten ein »überall anzutreffendes« Phänomen darstellt. Dazu benötigen wir zwei Ergebnisse der Funktionalanalysis. Das erste ist der

- 48 Satz von Baire** *In einem Banachraum ist der Durchschnitt abzählbar vieler offener dichter Teilmengen ebenfalls dicht.  $\times$*

Abb 11  
Zum Beweis des Satzes  
von Baire



««« Sei  $(V_n)_{n \geq 1}$  eine abzählbare Familie offener dichter Teilmengen des Banachraums  $E$ . Sei  $B_0$  eine beliebige, nicht leere offene Kugel. Dann ist  $V_1 \cap B_0$  offen und nicht leer, und es existiert eine abgeschlossene Kugel  $\bar{B}_1 := \bar{B}_{r_1}(x_1)$  mit

$$\bar{B}_1 \subset V_1 \cap B_0.$$

Dann ist auch  $V_2 \cap B_1$  offen und nicht leer, und es existiert eine weitere abgeschlossene Kugel  $\bar{B}_2 := \bar{B}_{r_2}(x_2)$  mit analoger Eigenschaft. Induktiv finden wir damit zu jedem  $n \geq 1$  eine abgeschlossene Kugel  $\bar{B}_n := \bar{B}_{r_n}(x_n)$  mit

$$\bar{B}_n \subset V_n \cap B_{n-1}.$$

Wir können es auch einrichten, dass  $r_1 > r_2 > \dots > r_n \rightarrow 0$ . Wegen  $x_m \in B_n$  für  $m \geq n$  bilden die Kugelzentren  $x_n$  damit eine Cauchyfolge. Da wir in einem Banachraum sind, existiert  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Für diesen Grenzwert gilt

$$x \in \bar{B}_n \subset V_n \cap B_0, \quad n \geq 1.$$

Also gilt auch

$$x \in \bigcap_{n \geq 1} V_n \cap B_0.$$

Da  $B_0$  beliebig war, ist der Durchschnitt aller  $V_n$  dicht in  $E$ . »»»

Entsprechendes gilt auch für  $G_\delta$ -Mengen, also den Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen. Diese sind natürlich im Allgemeinen nicht mehr offen.

- 49 **Korollar** In einem Banachraum ist der Durchschnitt abzählbar vieler dichter  $G_\delta$ -Mengen wieder eine dichte  $G_\delta$ -Menge. ✕

Der Satz von Baire wird oft mithilfe des Begriffs der *Baireschen Kategorie* formuliert. Zur Erinnerung: Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt

*nirgends dicht*, wenn ihr Abschluss keine inneren Punkte enthält. Mit anderen Worten, dass Komplement ihres Abschlusses ist offen und dicht. Nirgends dichte Mengen sind das topologische Analogon zu den Lebesgueschen Nullmengen.

**Definition** Eine Teilmenge eines topologischen Raums heißt *von erster Bairescher Kategorie*, wenn sie als abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen dargestellt werden kann. Andernfalls heißt sie *von zweiter Bairescher Kategorie*. ✕

Es gibt also nur zwei Bairesche Kategorien, und jede Teilmenge eines topologischen Raumes ist von genau einer solchen Kategorie.

▶ A. Nirgends dicht sind

- die leere Menge in jedem topologischen Raum,
  - Ein-Punkt-Mengen in einem normierten Vektorraum,
  - echte Unterräume von normierten Vektorräumen.
- B. Nicht nirgends dicht ist  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  und allgemeiner  $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ .

C. Von erster Kategorie sind

- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  als abzählbare Vereinigung von Ein-Punkt-Mengen in  $\mathbb{R}$ ,
- abzählbare Teilmengen eines nichttrivialen Vektorraumes,
- abzählbare Vereinigungen von Mengen erster Kategorie.

D. Ist  $C = A \cup B$  von zweiter Kategorie, so ist wenigstens eine der Mengen  $A$  und  $B$  von zweiter Kategorie. ◀

Das wichtigste Beispiel einer Menge von zweiter Bairescher Kategorie ist ein Banachraum selbst.

50 **Bairescher Kategoriesatz** Jeder Banachraum ist von zweiter Bairescher Kategorie. ✕

◀◀◀ Wir zeigen, dass ein Banachraum  $E$  nicht die Vereinigung von abzählbar vielen, nirgends dichten Teilmengen sein kann. — Sind  $A_1, A_2, \dots$  nirgends dichte Teilmengen von  $E$ , so sind

$$V_n = E \setminus A_n^-$$

offene, dichte Teilmengen von  $E$ . Nach dem Satz von Baire<sub>48</sub> ist

$$\emptyset \neq \bigcap_{n \geq 1} V_n = E \setminus \bigcup_{n \geq 1} A_n^-.$$

Also ist  $E$  nicht darstellbar als Vereinigung abzählbar vieler, nirgends dichter Mengen und damit von zweiter Kategorie. ▶▶▶▶

► Der Banachraum  $\mathbb{R}$  ist von zweiter Kategorie. Da

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$$

und  $\mathbb{Q}$  von erster Kategorie ist, ist  $\mathbb{Q}^c$ , also die Menge aller irrationalen Zahlen ebenfalls von zweiter Kategorie. ◀

- 51 **Korollar** Eine dichte  $G_\delta$ -Menge eines Banachraumes ist von zweiter Kategorie und damit insbesondere überabzählbar. ✕

◀◀◀ Sei  $B = \bigcap_n V_n$  der Durchschnitt offener Mengen  $V_n$ . Ist  $B$  dicht, so ist jedes  $V_n$  dicht und damit jedes Komplement  $A_n = V_n^c$  nirgends dicht. Also ist deren Vereinigung  $A = \bigcup_n A_n$  von erster Kategorie. Nun ist

$$E = A \cup B,$$

und  $E$  ist von zweiter Kategorie. Also ist auch  $B$  von zweiter Kategorie. ▶▶▶

Das zweite Resultat aus der Funktionalanalysis ist der

- 52 **Satz von Banach-Steinhaus** Sei  $E$  ein Banachraum und  $(\Lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$  eine beliebige Familie stetiger linearer Funktionale auf  $E$ . Dann gilt entweder

$$\sup_{\alpha \in A} \|\Lambda_\alpha\|_0 < \infty,$$

oder es existiert eine dichte  $G_\delta$ -Menge  $X$  in  $E$ , so dass

$$\sup_{\alpha \in A} |\Lambda_\alpha x| = \infty, \quad x \in X. \quad \times$$

*Bemerkung* Aus offensichtlichen Gründen wird dieser Satz auch *Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit* genannt. ∞

◀◀◀ Definiere  $\varphi: E \rightarrow [0, \infty]$  durch

$$\varphi(x) := \sup_{\alpha \in A} |\Lambda_\alpha x|$$

und betrachte die Mengen

$$V_n := \{x \in E : \varphi(x) > n\}, \quad n \geq 1.$$

Wegen der Stetigkeit der  $\Lambda_\alpha$  ist jedes  $V_n$  offen. Die erste Alternative ist, dass eine dieser Mengen *nicht dicht* in  $E$  ist, zum Beispiel  $V_N$ . Dann existiert eine nichtentartete abgeschlossene Kugel  $\bar{B}_r(u)$  im Komplement von  $V_N$ . Es gilt also

$$\varphi(u+x) = \sup_{\alpha \in A} \|\Lambda_\alpha(u+x)\| \leq N, \quad \|x\| \leq r.$$

Dann aber sind die  $\Lambda_\alpha$  gleichmäßig beschränkt, denn

$$\|\Lambda_\alpha x\| \leq \|\Lambda_\alpha(u+x)\| + \|\Lambda_\alpha u\| \leq 2N, \quad \|x\| \leq r.$$

Die andere Alternative ist, dass alle  $V_n$  *dicht* in  $E$  sind. Dann ist aufgrund des Satzes von Baire<sub>48</sub> der Durchschnitt aller  $V_n$  eine dichte  $G_\delta$ -Menge  $X$ , und in jedem Punkt  $x \in X$  gilt  $\varphi(x) = \infty$ .  $\gggg$

### ■ Anwendung auf Fourierreihen

Jetzt kommen wir wieder zur Divergenz von Fourierreihen.

53 **Lemma** Zu jedem  $t \in \mathbb{T}$  existiert eine dichte  $G_\delta$ -Menge  $E_t \subset C(\mathbb{T})$ , so dass

$$s^*f(t) := \sup_{n \geq 0} |s_n f(t)| = \infty$$

für jedes  $f \in E_t$ .  $\times$

$\llll$  Fixiere  $t \in \mathbb{T}$  und betrachte die Funktionale

$$\Lambda_n : C(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto s_n f(t).$$

Diese sind beschränkt bezüglich der Supremumsnorm, denn

$$|\Lambda_n f| = |(s_n f)(t)| \leq \|D_n\|_1 \|f\|_\infty.$$

Tatsächlich gilt

$$\|\Lambda_n\|_0 = \|D_n\|_1.$$

Für die Treppenfunktion  $\phi = \operatorname{sgn} D_n(t - \cdot)$  gilt nämlich

$$\Lambda_n \phi = \int_{\mathbb{T}} \phi(s) D_n(t - s) ds = \int_{\mathbb{T}} |D_n(t - s)| ds = \|D_n\|_1.$$

Approximieren wir  $\phi$  durch eine Folge stetiger Funktionen  $\phi_k$  mit  $\|\phi_k\|_\infty = 1$ , so erhalten wir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\Lambda_n \phi_k| = |\Lambda_n \phi| = \|D_n\|_1,$$

was die Behauptung  $\|\Lambda_n\|_0 = \|D_n\|_1$  ergibt.

Nun gilt aber  $\|D_n\|_1 \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ <sub>A-24</sub>. Die Familie  $(\Lambda_n)$  ist somit *nicht* gleichmäßig beschränkt. Aufgrund des Satzes von Banach-Steinhaus<sub>52</sub> existiert deshalb eine dichte  $G_\delta$ -Menge  $E_t$  in  $C(\mathbb{T})$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\Lambda_n f| = \lim_{n \rightarrow \infty} |s_n f(t)| = s^*f(t) = \infty, \quad f \in E_t.$$

Das ist die Behauptung.  $\gggg$

Dieses Lemma betrachtet nur die Konvergenz in einem einzelnen Punkt. Der folgende Satz dehnt dies auf dichte  $G_\delta$ -Mengen in  $\mathbb{T}$  aus.

54 **Satz** Es gibt eine dichte  $G_\delta$ -Menge  $E$  in  $C(\mathbb{T})$ , so dass für jedes  $f \in E$

$$E_f := \{t \in \mathbb{T} : s^*f(t) = \infty\}$$

eine dichte  $G_\delta$ -Menge in  $\mathbb{T}$  ist. Insbesondere ist  $E_f$  überabzählbar.  $\times$

⟨⟨⟨⟨ Sei  $(t_n)$  eine beliebige, in  $\mathbb{T}$  dicht liegende Folge. Dann ist  $\text{\scriptsize 53}$

$$E := \bigcap_{n \geq 1} E_{t_n}$$

als Durchschnitt abzählbar vieler dichter  $G_\delta$ -Mengen wieder eine dichte  $G_\delta$ -Menge.

Für  $f \in E$  gilt

$$s^*f(t_n) = \infty, \quad n \geq 1.$$

Die Funktion  $s^*f$  ist jedoch *unterhalbstetig* – das heißt, es gilt überall

$$\liminf_{s \rightarrow t} s^*f(s) \geq s^*f(t).$$

Daher gilt auch  $s^*f(t) = \infty$  für  $t$  in einer  $G_\delta$ -Menge, die alle  $t_n$  enthält und somit ebenfalls dicht ist  $\text{\scriptsize A-36}$ .  $\rangle\rangle\rangle\rangle$

#### ■ Noch etwas Funktionalanalysis

Zum Abschluss tragen wir noch den Beweis des Satzes von der offenen Abbildung nach, der ebenfalls auf dem Satz von Baire basiert.

55 **Satz von der offenen Abbildung** Sind  $E$  und  $F$  Banachräume und  $\Lambda: E \rightarrow F$  stetig und bijektiv, so ist auch  $\Lambda^{-1}$  stetig.  $\times$

*Bemerkung* Sei  $\Lambda: E \rightarrow F$  umkehrbar. Die Stetigkeit der Umkehrabbildung  $\Lambda^{-1}$  ist äquivalent zur Offenheit der Abbildung  $\Lambda$  selbst, also der Eigenschaft, offene Mengen auf offene Mengen abzubilden. Daher die Bezeichnung als *Satz von der offenen Abbildung*.  $\rightarrow$

⟨⟨⟨⟨ Der Beweis erfolgt in vier Schritten.

a. Sei  $U \subset E$  offen und  $0 \in U$ . Wir zeigen zunächst, dass  $\Lambda(U)^\circ$  eine offene Menge  $V \subset F$  enthält.

Die offene Menge  $U$  enthält eine kleine, offene Kugel  $B$  um 0. Damit gilt

$$U = \bigcup_{n \geq 1} nB$$

mit  $nB = \{nx : x \in B\}$ . Da  $\Lambda$  surjektiv ist, gilt dann auch

$$F = \bigcup_{n \geq 1} n\Lambda(B)^\circ.$$

Dabei können nicht alle Mengen  $n\Lambda(B)^-$  nirgends dicht sein<sub>50</sub>. Also enthält wenigstens ein  $m\Lambda(B)^-$  eine offene Menge. Dann enthält aber auch  $\Lambda(B)^-$  selbst eine offene Teilmenge  $V \subset F$ , da Multiplikation mit  $m$  einen Homöomorphismus darstellt.

*b.* Nun zeigen wir, dass  $\Lambda(U)^-$  auch eine offene Umgebung von 0 enthält.

Die Abbildung  $E \times E \rightarrow E$ ,  $(u_1, u_2) \mapsto u_1 - u_2$  ist stetig. Also gibt es eine offene Umgebung  $N$  von 0 mit

$$N - N := \{u_1 - u_2 : u_1, u_2 \in N\} \subset U.$$

Dann gilt auch

$$\Lambda(U)^- \supset (\Lambda(N) - \Lambda(N))^- \supset \Lambda(N)^- - \Lambda(N)^- \supset V - V$$

mit einer gemäß dem ersten Schritt existierenden offenen Menge  $V \subset \Lambda(N)^-$ . Die Menge  $V - V$  ist aber offensichtlich offen in  $F$  und enthält 0.

*c.* Wir zeigen nun, dass das Bild jeder offenen Nullpunktsumgebung  $U \subset E$  eine offenen Nullpunktsumgebung  $V \subset F$  enthält.

Sei  $\varepsilon > 0$ . Sei  $B_i \subset E$  die offene Kugel um 0 mit Radius  $\varepsilon_i = \varepsilon/2^{i+1}$  für  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Gemäß dem letzten Schritt enthält  $\Lambda(B_i)^-$  eine offene Kugel  $V_i \subset F$  um 0 mit Radius  $s_i$ . Daraus folgt induktiv, dass zu jedem  $\nu \in V_0$  Punkte  $u_i \in B_i$  existieren, so dass

$$y_n := y - \sum_{0 \leq i < n} \Lambda u_i \in V_n \subset \Lambda(B_n)^-.$$

Für  $n = 0$  ist nichts zu zeigen. Gilt dies aber für ein  $n \geq 0$ , so existiert zum Urbild von  $y_n$  innerhalb von  $B_n$  ein  $u_n$  derart, dass

$$\|y_n - \Lambda u_n\| < s_{n+1}. \quad (2)$$

Also ist  $y_n - \Lambda u_n \in V_{n+1}$ , und die Behauptung gilt auch für  $n + 1$ .

Aufgrund der Wahl der  $\varepsilon_i$  existiert  $u := \sum_{i \geq 0} u_i$ , und es ist  $\|u\| < \varepsilon$ . Da die Radien der  $V_n$  offensichtlich gegen Null streben, gilt  $\Lambda u = y$  wegen (2). Für die offene Kugel  $U$  um 0 mit Radius  $\varepsilon$  gilt somit  $\Lambda(U) \supset V_0$ . Das wollten wir zeigen.

*d.* Damit ist gezeigt, dass das Bild einer offenen Umgebung von  $0 \in F$  unter  $\Lambda^{-1}$  beschränkt in  $E$  ist. Also ist  $\Lambda^{-1}$  stetig. >>>>